



## Übungsblatt 3 Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **4.11.2015** um spätestens **16ct**.

*Notwendige Daten auf dem Deckblatt:* Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

### Übungsaufgabe 1 (Rechnen mit komplexen Zahlen) (4+6+10)

(a) Berechnen Sie den Betrag, den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

i.  $(2 + 3i) + (1 + i)$

ii.  $(2 + 3i)(1 + i)$

iii.  $\frac{1 + i}{1 - i}$

iv.  $\frac{4 - 3i}{4 + 3i}$

(b) Man bestimme alle Lösungen der Gleichungen  $z^2 - 2z + 2 = 0$  und  $z^2 + 4z + 4 - i = 0$  in  $\mathbb{C}$ .

(c) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der Gausschen Ebene und schreiben Sie diese um in die Lösungsmenge einer Geradengleichung  $a \operatorname{Re} z + b \operatorname{Im} z = c$  (mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) oder einer Kreisgleichung  $|z - z_0| = r$  (für  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ ).

i.  $X = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = |z + i|\}$

ii.  $Y = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 2|z + i|\}$

### Übungsaufgabe 2 (Charakteristik eines Körpers) (10+5\*)

Es sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper. Wir definieren

$$\operatorname{char} K = \min\{n \in \mathbb{N}^* : 1 + \dots + 1 = 0, \text{ wobei hier genau } n \text{ Einsen addiert werden.}\}$$

Wenn das Minimum nicht existiert (was nur sein kann, wenn die Menge leer ist), dann setzt man  $\operatorname{char} K = 0$ . Man nennt  $\operatorname{char} K$  die **Charakteristik** des Körpers  $K$ .

- (a) Man zeige, dass die Charakteristik entweder 0 oder eine Primzahl ist.  
 (b) Es sei  $n = |K| < \infty$ . Man zeige, dass  $\operatorname{char} K \neq 0$  ist und  $\operatorname{char} K | n$  gilt.

### Übungsaufgabe 3 (10)

Man kann zeigen, dass es einen Körper  $(K, +, \cdot)$  mit 4 Elementen gibt. Für uns besteht  $K$  aus den Elementen

$$K = \left\{ \begin{matrix} \star & \odot & \text{//} & \blacktriangleright \end{matrix} \right\}.$$

Die folgenden Verknüpfungstabellen sind unvollständig.

+	$\star$	$\odot$	$\text{//}$	$\blacktriangleright$
$\star$				
$\odot$		$\text{//}$		
$\text{//}$				
$\blacktriangleright$				

$\cdot$	$\star$	$\odot$	$\text{//}$	$\blacktriangleright$
$\star$				
$\odot$		$\odot$		
$\text{//}$			$\text{//}$	
$\blacktriangleright$				

Man fülle die Tabellen so aus, dass sich ein Körper ergibt (dies geht nur auf eine Weise!). Begründen Sie die Wahlen der Tabelleneinträge. Sie müssen anschließend **nicht** zeigen, dass dies tatsächlich einen Körper definiert.

**Bitte wenden!**

**Tutoriumsaufgabe 1**

(0)

Man kann zeigen, dass es einen Körper  $(K, +, \cdot)$  mit 3 Elementen gibt. Stellen Sie die Verknüpfungstabelle für diesen Körper auf. Die Elemente von  $K$  seien dabei 0 und 1 für die beiden neutralen Elemente sowie  $a$  für das fehlende dritte Element. Begründen Sie die Eintragungen in der Verknüpfungstabelle. Auch hier müssen Sie nicht nachweisen, dass es sich dabei um einen Körper handelt.

**Tutoriumsaufgabe 2**

(0)

- (a) Es sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Man berechne alle Lösungen von  $z^2 = z_0^2$  in  $\mathbb{C}$ .  
(b) Man berechne die komplexen Lösungen von  $z^2 + 2z + 2 = 0$ .  
(c) Man skizziere die folgenden Mengen in der Gaußschen Ebene:

i.  $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}$

ii.  $B = \{(1 + i) + z \in \mathbb{C} : z \in A\}$

iii.  $C = \{3 \cdot z \in \mathbb{C} : z \in A\}$

iv.  $D = \{i \cdot z \in \mathbb{C} : z \in A\}$