Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 3

Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **4.11.2015** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

---

Übungsaufgabe 1 (*Rechnen mit komplexen Zahlen*) (4+6+10)

(a) Berechnen Sie den Betrag, den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

i. $(2+3i)+(1+i)$ ii. $(2+3i)(1+i)$

iii. $\dfrac{1+i}{1-i}$ iv. $\dfrac{4-3i}{4+3i}$

(b) Man bestimme alle Lösungen der Gleichungen $z^2-2z+2=0$ und $z^2+4z+4-i=0$ in $\mathbb{C}$.
Hinweis: Denken Sie an eine quadratische Ergänzung. Man benutze auch die Tutoriumsaufgabe 1 (a).

(c) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der Gausschen Ebene und schreiben Sie diese um in die Lösungsmenge einer Geradengleichung $a\operatorname{Re} z + b\operatorname{Im} z = c$ (mit $a,b,c\in\mathbb{R}$) oder einer Kreisgleichung $|z-z_0|=r$ (für $z_0\in\mathbb{C}$, $r>0$).

i. $X=\{z\in\mathbb{C}: |z-i|=|z+i|\}$ ii. $Y=\{z\in\mathbb{C}: |z-i|=2|z+i|\}$

Hinweis: Quadrieren Sie die Gleichungen und benutzen Sie die komplexe Konjugation um den Betrag auszudrücken.

Übungsaufgabe 2 (*Charakteristik eines Körpers*) (10+5*)

Es sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper. Wir definieren

$$\operatorname{char} K = \min\{n\in\mathbb{N}^*:\ 1+...+1=0,\ \text{wobei hier genau } n \text{ Einsen addiert werden.}\}$$

Wenn das Minimum nicht existiert (was nur sein kann, wenn die Menge leer ist), dann setzt man $\operatorname{char} K = 0$. Man nennt $\operatorname{char} K$ die **Charakteristik** des Körpers K.

(a) Man zeige, dass die Charakteristik entweder 0 oder eine Primzahl ist.
Hinweis: Die Beweisidee ist relativ simpel. Sie werden das Distributivgesetz verwenden müssen und irgendwie die Teiler von n ins Spiel bringen müssen.

(b) Es sei $n=|K|<\infty$. Man zeige, dass $\operatorname{char} K\neq 0$ ist und $\operatorname{char} K | n$ gilt.
Hinweis: Wie viele Elemente enthält die Menge

$$F_0=\{1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, ...\}?$$

Versuchen Sie K als disjunkte Vereinigung ähnlicher solcher Mengen zu schreiben.

Bitte wenden!

Übungsaufgabe 3 (10)

Man kann zeigen, dass es einen Körper $(K, +, \cdot)$ mit 4 Elementen gibt. Für uns besteht K aus den Elementen

$K = \{$❄, ☼, ////, ⚡$\}$.

Die folgenden Verknüpfungstabellen sind unvollständig.

+	❄	☼	////	⚡
❄				
☼		////		
////				
⚡				

$\cdot$	❄	☼	////	⚡
❄				
☼		☼		
////			////	
⚡				

Man fülle die Tabellen so aus, dass sich ein Körper ergibt (dies geht nur auf eine Weise!). Begründen Sie die Wahlen der Tabelleneinträge. Sie müssen anschließend **nicht** zeigen, dass dies tatsächlich einen Körper definiert.

Tutoriumsaufgabe 1 (0)

Man kann zeigen, dass es einen Körper $(K, +, \cdot)$ mit 3 Elementen gibt. Stellen Sie die Verknüpfungstabelle für diesen Körper auf. Die Elemente von K seien dabei 0 und 1 für die beiden neutralen Elemente sowie a für das fehlende dritte Element. Begründen Sie die Eintragungen in der Verknüpfungstabelle. Auch hier müssen Sie nicht nachweisen, dass es sich dabei um einen Körper handelt.

Tutoriumsaufgabe 2 (0)

(a) Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Man berechne alle Lösungen von $z^2 = z_0^2$ in $\mathbb{C}$.

(b) Man berechne die komplexen Lösungen von $z^2 + 2z + 2 = 0$.

(c) Man skizziere die folgenden Mengen in der Gaußschen Ebene:

i. $A = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - i| = 1\}$

ii. $B = \{(1 + i) + z \in \mathbb{C} : \ z \in A\}$

iii. $C = \{3 \cdot z \in \mathbb{C} : \ z \in A\}$

iv. $D = \{i \cdot z \in \mathbb{C} : z \in A\}$