ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 4

Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **11.11.2015** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

---

Übungsaufgabe 1 (*Nachweis, dass es sich um Vektorräume handelt*) (5+5)

Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen zusammen mit der angegeben Skalarmultiplikation und der angegebenen Addition einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

(a) Man betrachte die Menge aller Polynomfunktionen vom Grad höchstens n ($n \in \mathbb{N}$ sei fest)

$$P_n := \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, \exists a_0, ..., a_n \in \mathbb{R} : \; f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \right\}$$

zusammen mit der Addition definiert über $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ und der Skalarmultiplikation definiert über $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g \in P_n$.

(b) Eine Funktion $a\colon \mathbb{N} \to X$ (X ist eine Menge) nennt man auch eine **Folge** in X und schreibt statt $a(n)$ auch a_n und statt a auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Menge der Folgen in X bezeichnet man mit $X^{\mathbb{N}}$. Zu betrachten ist nun die Menge aller Folgen mit endlichem Träger

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, a_n \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N} \right\}$$

zusammen mit den Operationen definiert über

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } \lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$[1].

Übungsaufgabe 2 (*Basen, Erzeugendensysteme und lineare Unabhängigkeit*) (20+5)

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren in dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V linear unabhängig sind, Erzeugendensysteme oder Basen von V bilden (Wie immer mit Begründung!).

i. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^4$. Die zu untersuchenden Vektoren sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $V = \mathbb{C}^2$ gegeben. Man betrachte die Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

[1] Genauso bezeichnet man die Menge aller Funktionen $f\colon X \to Y$ auch mit $Y^X = \mathrm{Abb}(X,Y)$. Falls es in Y ein ausgezeichnetes Element $0 \in Y$ gibt, dann schreibt man $Y^{(X)}$ auch allgemein für die Menge aller Funktionen $f\colon X \to Y$ für die $f(x) \neq 0$ für höchstens endlich viele $x \in X$ gilt. Diese Funktionen nennt man Funktionen mit endlichem Träger.

Bitte wenden!

iii. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{C}^2$ gegeben. Man betrachte die Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

iv. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ und $V = \mathbb{F}_2^3$ gegeben[2]. Die zu untersuchenden Vektoren sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Man zeige, dass $e_0, ..., e_n \in P_n$ (siehe Aufgabe 1 (a), $n \in \mathbb{N}$ fest) definiert über $e_k(t) = t^k$ für $k = 0, ..., n$ eine Basis von P_n bildet[3].

Übungsaufgabe 3 (*Eine Basis ist ein unverlängerbares linear unabhängiges System*) (5)
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum für einen Körper $\mathbb{K}$. Weiter seien Vektoren $v_1, ..., v_n \in V$ gegeben. Man zeige, dass diese Vektoren $v_1, ..., v_n$ genau dann eine Basis bilden, wenn für jedes $v \in V$ die Vektoren $v_1, ..., v_n, v$ linear abhängig sind aber $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig ist. Im letzteren Fall spricht man auch von einem unverlängerbarem linear unabhängigen System von Vektoren.

[2]Es ist $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper bestehend aus zwei Elementen, welchen Sie aus der Vorlesung kennen. Dies ist die übliche Bezeichnung für diesen Körper. Die Bezeichnung $\mathbb{F}$ ist an das englische Wort für Körper "field" angelehnt. Die Zwei im Index steht für die Anzahl der Elemente im Körper. Sie haben beispielsweise auf dem letzten Blatt $\mathbb{F}_3$ und $\mathbb{F}_4$ kennen gelernt.

[3]Man beachte, dass $e_0(t) = t^0 = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ nach Definition gilt.

Bitte wenden!

Tutoriumsaufgabe 1 (*Nochmal zu Basen, Erzeugendensysteme und lineare Unabhängigkeit*)(0)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren in dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V linear unabhängig sind, Erzeugendensysteme oder Basen von V bilden (Wie immer mit Begründung!).

(a) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2$. Die zu untersuchenden Vektoren sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^3$. Die zu untersuchenden Vektoren sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $V = \mathbb{C}^2$ gegeben. Man betrachte die Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2i \end{pmatrix}$$

(d) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{C}^2$ gegeben. Man betrachte die Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2i \end{pmatrix}$$

Tutoriumsaufgabe 2 (*Multiple-Choice*) (0)
Man entscheide jeweils, welche der folgenden Antwortmöglichkeiten richtig bzw. falsch sind. Geben Sie zudem eine kurze Begründung für ihre Wahl an.

(a) Wenn $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper ist, dann
□ ist $(\mathbb{K}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe. □ folgt aus $xy = 0$ bereits $x = 0$ oder $y = 0$ für $x, y \in \mathbb{K}$.
□ ist $(\mathbb{K}, +)$ eine abelsche Gruppe. □ folgt aus $x + x = 0$ bereits $x = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}$.

(b) Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Für die folgenden Ausdrücke muss man voraussetzen, dass f bijektiv ist, damit diese definiert sind:
□ $f^{-1}(y)$ für $y \in Y$ □ $f^{-1}(\{y\})$ für $y \in Y$ □ $f^{-1}(N)$ für $N \subset Y$

(c) Es gibt eine bijektive Funktion
□ $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. □ $f\colon \mathbb{N} \to \mathfrak{P}(\mathbb{N})$. □ $f\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c\}$.

(d) Jeder $\mathbb{R}$-Vektorraum ist endlich erzeugt.
□ wahr □ falsch

(e) Gegeben sei ein Erzeugendensystem $v_1, ..., v_n \in V$ eines Vektorraumes V. Weiter bleibe dies kein Erzeugendensystem, wenn man das System verkleinere (also mindestens einen Vektor entfernt). Dann bildet $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V.
□ wahr □ falsch