ulm university universität ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 6

Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **25.11.2015** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

---

Übungsaufgabe 1 (6+6+10*)

(a) Man zeige, dass die folgende Abbildung linear ist und gebe eine Basis vom Bild und Kern an.

$$F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ \ F\colon (a,b,c,d) \mapsto (a, 2c+d, 2a+2c+d)$$

(b) Man finde eine Basis von U, V, $U+V$ und $U \cap V$ für die folgenden Untervektorräume vom $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$

$$U = \operatorname{span}\{(1,2,1);(2,1,1);(-1,1,0)\},\ \ V = \operatorname{span}\{(1,1,1);(1,0,1)\}$$

(c) Es sei L ein endlicher Körper. Man zeige, dass

$$K = \left\{ n \cdot 1_L := \sum_{k=1}^{n} 1_L \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

ein Körper mit der Addition und Multiplikation von L ist. Man benutze nun, dass L ein K-Vektorraum ist, um zu zeigen, dass $|L| = p^m$ für eine Primzahl p und ein $m \in \mathbb{N}^*$ gilt.

Übungsaufgabe 2 (*Googles PageRank-Algorithmus - ein erster Einblick*) (5+5+3)

Wir sind nun in der Lage die Grundzüge des patentierten PageRank-Algorithmus zu verstehen, welcher als Grundlage der Sortierung der Suchergebnisse von Google fungiert.
Wir betrachten also ein Teilnetz der relevanten Seiten, welche wir nach Relevanz ordnen wollen. Diese seien numeriert mit $k = 1, ..., n$. Wir gehen zur Vereinfachung davon aus, dass jede der n Seiten auf eine der anderen Seiten verlinkt (eventuell auch mehrfach). Wir setzen noch

$$b_{kl} = \text{ Der relative Anteil der Links von Seite } l \text{ zu Seite } k.$$

Die Wichtigkeit (oder PageRank) ω_k einer Seite k (je größer ω_k, desto weiter oben erscheint das Suchergebnis) sollte erfüllen

$$\sum_{l=1}^{n} b_{kl}\omega_l = \omega_k$$

für alle $k = 1, ..., n$. Ob es überhaupt einen nicht-trivialen PageRank (der triviale PageRank wäre $\omega_k = 0$ für alle $k = 1, ..., n$) gibt und ob die Bedingung Sinn macht, wollen wir nun verstehen[1].

(a) Es sei A eine reelle quadratische Matrix mit den Spalten $u_1, ..., u_n$. Es seien alle Spaltensummen (Summe der Einträge in einer Spalte) von A gleich 0. Man zeige, dass dann $u_1, ..., u_n$ linear abhängig sind.

[1] Es sind noch viele weitere Fragen zu beantworten. Ist etwa $\omega_k \geq 0$? Wie kann man die Eindeutigkeit von ω_k erreichen? Wie kann man ω_k effizient berechnen (n ist meist sehr groß!). Diese Fragen sind aber noch zu schwer für uns.

Bitte wenden!

(b) Es sei B eine quadratische Matrix mit den Spalten $v_1, ..., v_n$ und alle Spaltensummen seien 1. Man schließe aus (a), dass es Zahlen $\omega_1, ..., \omega_n \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht alle Null sind und für die gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k v_k = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}.$$

(c) Man zeige, dass es mindestens eine nicht-triviale Wahl der PageRanks gibt und erkläre warum die Bedingung an den PageRank sinnvoll scheint (auch im Vergleich zu $\omega_k = \sum_{l=1}^{n} b_{kl}$).

Übungsaufgabe 3 (*Polynomfunktionen zum Zweiten*) (7+5+3)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $M \subset \mathbb{K}$ und es bezeichne[2]

$$P_n(M) := \left\{ p \colon M \to \mathbb{K} \;\middle|\; \exists a_0, ..., a_n \in \mathbb{K} : \; p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ für alle } x \in M \right\}$$

die Menge der Polynomfunktionen realisiert auf M vom Grade höchstens n als $\mathbb{K}$-Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{K})$ (dies müssen Sie nicht beweisen). Wir nehmen noch an, dass die Menge M und damit der Körper $\mathbb{K}$ mindestens $n+1$ **verschiedene** Elemente $x_0, ..., x_n \in M$ enthält[3]. Bearbeiten Sie die Aufgaben ohne die Lagrange Interpolation zu benutzen.

(a) Man zeige, dass $e_0, ..., e_n$ und $p_0, ..., p_n$ je eine Basis von $P_n(M)$ bilden[4]. Dabei gilt (für alle $x \in M$ und $k = 0, ..., n$)

$$e_k(x) = x^k \text{ und } p_k(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n} (x - x_l).$$

(b) Man zeige, dass die Abbildung

$$F \colon \mathbb{K}_n[X] \to P_n(M), \; F\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right) : M \ni x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

ein Vektorraumisomorphismus (linear und bijektiv) ist[5].

(c) Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ ein offenes Intervall. Gegeben seien zwei Funktionen $f, g \colon (a, b) \to \mathbb{R}$, natürliche Zahlen $n \leq m$ und $a_0, ..., a_m, b_0, ..., b_n \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k, \; g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k.$$

Man zeige $f = g$ genau dann, wenn $a_k = b_k$ für alle $k = 0, ..., n$ und $a_k = 0$ für $k > n$.

---

[2] Wir unterdrücken $\mathbb{K}$ und in der Notation. Wir schreiben auch P_n statt $P_n(M)$.

[3] Ohne diese Voraussetzung ist das Folgende falsch. Beispielsweise wäre $\dim P_n(M) = |M|$, falls $|M| < n + 1$.

[4] Insbesondere haben wir (im Fall $M = \mathbb{K} = \mathbb{R}$) einen Beweis von Übungsaufgabe 2 (b) gefunden, der nicht auf Aussagen der Analysis zurückgreift.

[5] Dies zeigt, dass man zwischen Polynomen und Polynomfunktionen vom Grad höchstens n auf $\mathbb{K}$ (bzw. Polynomfunktionen realisiert auf einer genügend großen Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$) keinen Unterschied machen muss, wenn $|\mathbb{K}| > n$ (bzw. $|M| > n$) ist. Der Lagrange Interpolationssatz gilt also auch für Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wir bekommen sogar den Lagrange Interpolationssatz wieder zurück, wenn wir $M = \{x_0, ..., x_n\}$ setzen.

Tutoriumsaufgabe 1 (*Eine Zusammenfassung des bisherigen Stoffes*) (0)
Machen Sie bis Paragraph 8 (inklusive) eine Zusammenfassung des bisherigen Vorlesungs- und Übungsstoffes (Definitionen, wichtige Aussagen, die Dimensionen welcher Vektorräume kennen Sie, ...). Bringen Sie diese Zusammenfassung in das Tutorium mit und lernen Sie die Aussagen und Definitionen.
Bemerkung: Zu dieser Aufgabe wird es keine Musterlösung geben. Sie sollten diese Zusammenfassung selber erstellen.

Tutoriumsaufgabe 2 (0)

(a) Welche der folgenden Abbildungen sind linear (mit Beweis)?
   i. $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = x^2$
   ii. $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $G(x, y) = (2x + y, y - x + 1, x + y)$
   iii. $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $H(x, y) = (2x + y, y - x, x + y)$

(b) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \operatorname{span}\{(1, 1, 2), (1, 1, 3), (2, 2, 0)\}$ ein Untervektorraum. Gibt es einen Untervektorraum W von $\mathbb{R}^3$ mit $U \oplus W = V$? Wenn es einen solchen Raum gibt, gebe man diesen auch konkret an.