

Übungsblatt 9

Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **16.12.2015** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

Übungsaufgabe 1 (*Gleichungssysteme lösen*)

(8+8+7)

Entscheiden Sie (ohne die Lösung explizit zu berechnen) im Teil (a) und (b) welche Struktur¹ die Lösungsmenge hat und berechnen Sie danach die Lösungsmengen aller Teile in Parameterform².

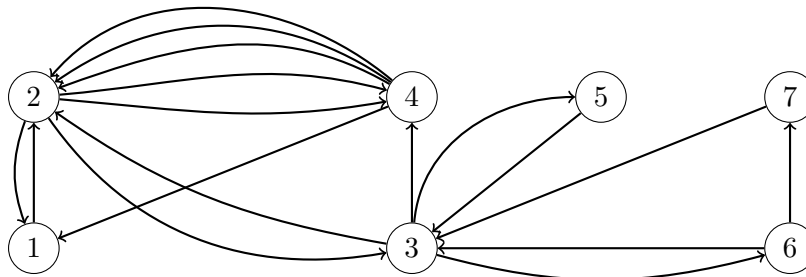
(a) Gesucht ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie zudem eine Parametrisierung der $c \in \mathbb{R}^4$ mit $\text{Lös}(A, c) \neq \emptyset$ an?

(b) Gesucht sind alle $p \in P_n(\mathbb{R})$ (für $n = 2, 3, 4$) mit $p(0) = 1$, $p(1) = 1$, $p(-1) = -3$ und $p(2) = 3$. Schreiben Sie dabei die Bedingungen um in Gleichungen für die Koeffizienten von $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ($x \in \mathbb{R}$).

(c) Gesucht sind die PageRanks ω_k ($k = 1, \dots, 7$; siehe Blatt 6) von folgendem Netz:



Vergleichen Sie dies auch mit der schlechteren Bedingung $\tilde{\omega}_k = \sum_{l=1}^n b_{kl}$ an die PageRanks, die in Blatt 6 Übungsaufgabe 2 (c) erwähnt wird.

Übungsaufgabe 2 (*Erneut: Summe und Schnitt von Untervektorräumen*)

(7+5)

(a) Man berechne eine Basis von $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ der folgenden reellen Untervektorräume von $\mathbb{R}^6$:

$$U_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad U_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

¹Ist die Menge leer? Handelt es sich um einen affinen Raum? Wenn ja, von welcher Dimension?

²Wir meinen mit einer Parametrisierung stets eine Parametrisierung affin in den Parametern mit minimaler Anzahl an Parametern (also derart, wie Sie der Gauß-Algorithmus berechnet).

Hinweis: Für eine Basis von $U_1 \cap U_2$ müssen Sie ein großes Gleichungssystem lösen.

- (b) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$. Man bestimme die Dimension der Untervektorräume

$$U_1 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} : A^T = A\}, \quad U_2 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} : A^T = -A\}$$

von $\mathbb{K}^{n \times n}$ und zeige $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{K}^{n \times n}$.

Übungsaufgabe 3 (Affine Abbildungen)

(5+10*)

Es seien V, W zwei $\mathbb{K}$ -Vektorräume für einen Körper $\mathbb{K}$ mit $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ sowie $A_1 = a_1 + U_1 \subset V$ und $A_2 = a_2 + U_2 \subset W$ affine Unterräume mit assoziierten Untervektorräumen U_1, U_2 . Eine Abbildung $f: A_1 \rightarrow A_2$ heißt **affin**, falls $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ sowie $x, y \in A_1$ gilt³.

- (a) Man zeige, dass (dies ist der lineare Teil von f)

$$F(u) := f(a + u) - f(a)$$

für $u \in U_1$ unabhängig von $a \in A_1$ ist, eine lineare Abbildung $F: U_1 \rightarrow U_2$ definiert und f genau dann bijektiv (bzw. injektiv bzw. surjektiv) ist, wenn F bijektiv (bzw. injektiv bzw. surjektiv) ist⁴.

Hinweis: Dies kann man direkt nachrechnen.

- (b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es für jede reelle Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$ genau eine reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_{n+2} = \lambda x_{n+1} + x_n + y_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x_0 = a, x_{1000000} = b?^5$$

Hinweis: Man untersuche die affine (warum?) Abbildung $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert über $f((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (x_0, x_{1000000})$ auf Bijektivität. Dabei ist (warum affin?)

$$A = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_{n+2} = \lambda x_{n+1} + x_n + y_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Benutzen Sie den Teil (a), um $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ los zu werden und um die Abbildung linear zu machen. Danach muss man sich nur noch um die Injektivität des linearen Teils F kümmern (warum?).

³Die Bedingung an die Charakteristik ist wieder nur deshalb gegeben, dass man nur zwei Summanden verwenden muss. Die typische Anwendungen finden sich für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, wo es dann von Vorteil ist, dass man nur zwei Summanden hat.

⁴Man vergleiche dies mit Blatt 1 Tutoriumsaufgabe 2.

⁵Dies ist ein Randwertproblem für eine lineare Differenzengleichung. Randwertprobleme für gewöhnliche Differenzialgleichungen, wie sie eventuell später lernen werden, lassen sich mit derselben Methode behandeln. Solche Randwertprobleme kommen auf natürliche Weise in Physik, Partiellen Differenzialgleichungen, Finanzmathematik, Ingenieurwesen, Kontrolltheorie ... vor.

Tutoriumsaufgabe 1 (*Zusammenfassung II*) (0)

Man schreibe sich eine Zusammenfassung des Vorlesungs- und Übungsstoffes bis zum 11.12. und lerne alle relevanten Definitionen und Sätze. Falls dazu Unklarheiten bestehen sollten, dann bereiten Sie dazu Fragen für das Tutorium vor.

Bemerkung: Zu dieser Aufgabe wird es keine Musterlösung geben. Sie sollten diese Zusammenfassung selber erstellen.

Tutoriumsaufgabe 2 (*Lösbarkeit von Gleichungssystemen*) (0)

Welche der folgenden Gleichungssysteme sind lösbar? Ist die Lösung eindeutig?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für welche anderen Inhomogenitäten gibt es Lösungen? Sind die Lösungen dann auch eindeutig?

Tutoriumsaufgabe 3 (*Darstellungsmatrizen*) (0)

Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen zu folgenden linearen Abbildungen und angegebenen Basen.

- (a) $F: V \rightarrow W$ mit $F(p)(x) = xp(x) + p(x)$ (für $x \in \mathbb{R}$), $V = P_3(\mathbb{R}) = \langle\langle e_0, e_1, e_2, e_3 \rangle\rangle$ und $W = P_4(\mathbb{R}) = \langle\langle e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle\rangle$.
- (b) $G: V \rightarrow W$ mit $G(p) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$, $V = P_3(\mathbb{R}) = \langle\langle e_0, e_1, e_2, e_3 \rangle\rangle$ und $W = \mathbb{R}^4 = \langle\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle\rangle$.