ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Zweite Klausur Lineare Algebra 1

Achten Sie auf vollständige, saubere und schlüssige Argumentation! 100 Punkte sind 100%.

Aufgabe 1 (*Gleichungssysteme*) (10)

Man gebe eine Parametrisierung der $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ an, für welche gilt:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & & & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & & & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 2 (*Diagonalisierung*) (15+25)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & \pi & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Welche der Matrizen A_1, A_2, A_3, A_4 sind komplex, welche reell und welche orthogonal diagonalisierbar?

(b) Man gebe eine konkrete Drehmatrix $S \in \mathrm{SO}(3)$ und eine Diagonalmatrix D an mit $B = SDS^{-1}$. Dabei ist B gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (*Darstellungsmatrizen*) (10+5+5)

Gegeben sei eine lineare Abbildung $f\colon P_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit

$$f(p) = \begin{pmatrix} p(1) - p(-1) & 2p(0) & p'(0) - p(0) \\ p(2) + p(1) & p(-2) - p(1) & p(3) - p(0) \end{pmatrix}$$

für $p \in P_5(\mathbb{R})$. Weiter sei $\mathcal{A} = (e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ die Standardbasis von $P_5(\mathbb{R})$ definiert über $e_k(x) = x^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Zudem sei die Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^{2\times 3}$ gegeben.

(a) Man bestimme $A = A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$. Begründen Sie die Einträge der Matrix!

(b) Für die Matrix A aus (a) gilt $\mathrm{Lös}(A, 0) = \{0\}$ (dies muss nicht bewiesen werden). Man folgere aus dieser Aussage, dass f injektiv ist.

(c) Ist f ein linearer Isomorphismus? Begründen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 4 (*Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren*) (10)

Die folgende Aussage wurde in der Vorlesung und in einer allgemeineren Form in der Übung bewiesen. Sie sollen diese Aussage nun erneut beweisen. Verwenden Sie daher keine weiteren Aussagen über Eigenvektoren und Eigenwerte als die Definition. Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und $v_1, ..., v_m \in \mathbb{K}^n$ Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Weiter sei $\lambda_i \neq \lambda_j$, falls $i \neq j$. Zeigen Sie, dass $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 5 (*Matrizen mit vorgegebener algebraischer Identität*) (20)
Es sei $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ mit der Eigenschaft $A^n = A^{n+1}$ für ein $n \geq 1$. Man zeige, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn $A^2 = A$ gilt.

Aufgabe 6 (*Multiple-Choice*) (21)
Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. Es können mehrere Antworten pro Teilaufgabe richtig sein. Markieren Sie mit einem Kreuz alle richtigen Aussagen. Sie erhalten die volle Punktzahl der Teilaufgabe (3 Punkte), wenn Sie genau die richtigen Aussagen markiert haben. Je falsch gesetzem oder fehlendem Kreuz wird Ihnen ein Punkt von der Maximalpunktzahl der Teilaufgabe abgezogen. Die Punktzahl einer Teilaufgabe wird auf Null aufgerundet, sollte diese negativ sein. Die erreichte Punktzahl der Aufgabe entspricht der Summe der Punkte der Teilaufgaben.
Die Antworten sind auf ein gesondertes Antwortblatt für diese Aufgabe einzutragen.

(a) Es sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v, u \in V$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
☐ $0 \cdot v = 0$ ☐ $v + v = 0$ impliziert $v = 0$ ☐ $\lambda u = 0$ impliziert $u = 0$ oder $\lambda = 0$
☐ $u + v = v$ impliziert $u = 0$ ☐ $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ ☐ V ist isomorph zu $\mathbb{R}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$

(b) Es seien $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gegeben. Welche Aussagen über den Rang sind richtig?
☐ $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg} A$ ☐ $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg} B$ ☐ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$ ☐ $\operatorname{rg} A = n$, dann ist A invertierbar
☐ $\operatorname{rg} A = n = m$, dann ist A invertierbar ☐ $\operatorname{rg} A \leq \min\{n, m\}$

(c) Es sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit den Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Weiter sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und $A = A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$, $B = A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ und $C = A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$. Dann gilt:
☐ A, B sind ähnlich ☐ A, C sind ähnlich ☐ A, B sind äquivalent
☐ $\det A = \det B$ ☐ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} C$ ☐ $p_A = p_B$

(d) Es seien U_1, U_2 **verschiedene** Untervektorräume der Dimension 3 von $\mathbb{R}^5$. Was ist unter den Voraussetzungen möglich?
☐ $\dim(U_1 + U_2) = 4$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$ ☐ $U_1 \cup U_2$ ist ein Untervektorraum
☐ $\dim(U_1 + U_2) = 6$ ☐ $\dim(U_1 + U_2) = 2$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 4$
☐ $U_1 \cap U_1$ ist kein Untervektorraum ☐ $\dim(U_1 + U_2) = 4$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$

(e) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt:
☐ Falls p_A keine mehrfache Nullstelle hat, ist A reell diagonalisierbar.
☐ Existiert $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal mit $S^T AS$ diagonal, so ist A reell diagonalisierbar.
☐ Existiert $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar mit $S^{-1}AS$ diagonal, so ist A reell diagonalisierbar.
☐ Existiert $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar so, dass $S^{-1}AS$ eine reelle Diagonalmatrix ist, dann ist A reell diagonalisierbar.
☐ Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A, so ist A reell diagonalisierbar.
☐ Hat $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ einen komplexen nicht-reellen Eigenwert, so ist A reell diagonalisierbar.

(f) Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum endlicher Dimension n und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm auf V. Weiter sei $f\colon V \to V$ selbstadjungiert. Wir fassen $\mathbb{R}^n$ als euklidischen Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt auf. Dann gilt:
☐ Es gibt eine ONB von V ☐ Es gibt eine Isometrie $g\colon V \to \mathbb{R}^n$
☐ $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|v + u\|^2$ für alle $u, v \in V$ ☐ $\langle f(v), u\rangle = \langle v, f(u)\rangle$ für alle $u, v \in V$
☐ Es ist $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ symmetrisch für jede Basis $\mathcal{A}$ ☐ Es ist $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ symmetrisch für jede ONB $\mathcal{A}$

(g) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei reelle Matrizen, die orthogonal ähnlich sind. Dann gilt:
☐ A ist diagonalisierbar genau dann, wenn B diagonalisierbar ist. ☐ A und B sind ähnlich.
☐ Es gibt $S \in O(n)$ mit $A = SBS^T$. ☐ Es gibt $S \in SO(n)$ mit $SBS^T = A$.
☐ A ist symmetrisch genau dann wenn B symmetrisch ist. ☐ Es gibt eine ONB $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^n$ mit $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(F_A) = B$.

Viel Erfolg! (Σ 121)