ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Erste Klausur Lineare Algebra 1

Achten Sie auf vollständige, saubere und schlüssige Argumentation! 100 Punkte sind 100%.

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1 (*Gleichungssysteme*) (10+5)

(a) Man gebe eine Parametrisierung der $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ an, für welche gilt:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 2 \end{array}$$

(b) Ist $\text{Lös}(A, b)$ eine Ebene? Begründen Sie ihre Entscheidung. Dabei ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 1:

ad (a)

Das Gleichungssystem schreibt sich als $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden nun den Gauß-Algorithmus an, um dieses Gleichungssystem zu lösen. In einem ersten Schritt bringen wir die erweiterte Matrix $(A|b)$ auf Zeilenstuffenform über elementare Zeilenumformungen.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir können nun eine spezielle Lösung ablesen (über Rückwärtssubstitution; Nicht-Pivot-Variablen auf 0 gesetzt). Diese ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis des homogenen Systems bekommen wir erneut durch Rückwärtssubstitution (Genau eine Nicht-Pivot-Variable auf $\neq 0$ setzen) und erhalten

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist eine Parametrisierung der gesuchten Lösungsmenge gegeben durch

$$\text{Lös}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;:\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

ad (b)

Wegen $\operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg}(A|b)$ ist $\text{Lös}(A,b) \neq \emptyset$ und damit $\text{Lös}(A,b)$ ein affiner Unterrraum von $\mathbb{R}^5$. Die Dimension dieses Raumes ist $\dim \text{Lös}(A,b) = 5 - \operatorname{rg} A = 2$. Damit ist $\text{Lös}(A,b)$ eine Ebene.

Aufgabe 2 (*Diagonalisierung*) (25+10)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie eine explizite Matrix $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ an für welche $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. *Hinweis:* Achten Sie auf die Spalten 1 und 2 von A bei der Berechnung von p_A.

(b) Welche der Matrizen B_1, B_2 und B_3 sind reell und welche komplex diagonalisierbar?

Lösung von Aufgabe 2:

ad (a)

Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 3 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2-\lambda & -\lambda & 3 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)((-1-\lambda)(1-\lambda)+2) = (2-\lambda)(\lambda^2+1). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A ergeben sich als Nullstellen von p_A zu $2, i, -i$. Eine Basis des Eigenraumes zu 2 berechnet sich mittels Gauß aus

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und eine Basis des Eigenraumes zu i ergibt such mittels Gauß aus

$$A - iE_3 = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & 1 \\ 2 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 1-i \end{pmatrix} \overset{\text{(MZ)}}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 1-i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-i \\ 0 & 2-i & 1+2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus Symmetriegründen ergibt sich

$$\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

als Basis des Eigenraumes zu $-i$. Damit ist

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar (weil die Spalten linear unabhängig sind als Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten) und es ist $T^{-1}AT$ diagonal nach Konstruktion von T.

ad (b)

Die Eigenwerte der Dreiecksmatrix B_1 kann man von der Diagonalen ablesen. Der einzige Eigenwert ist also 1. Weil die Matrix keine Diagonalmatrix (bzw. kein Vielfaches der Einheitsmatrix ist), kann B_1 nicht reell oder komplex diagonalisierbar sein.

Die Matrix B_2 ist symmetrisch und reell und damit orthogonal reell diagonalisierbar (Spektralsatz). Insbesondere ist B_2 reell und komplex diagonalisierbar.

Wir berechnen für B_3 das charakteristische Polynom. Dieses ergibt sich (Δ-geblockte Matrix!) zu

$$p_{B_3}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = ((1-\lambda)^2 + 1)((1-\lambda)^2 - 5)$$

Die Matrix B_3 hat also zwei verschiedene reelle und zwei verschiedene nicht-reelle Eigenwerte. Folglich ist B_3 nicht reell-diagonalsierbar (es gibt nicht-reelle Eigenwerte) aber komplex diagonalisierbar (B_3 hat vier verschiedene Eigenwerte).

Aufgabe 3 (*Darstellungsmatrizen*) (10+5+5)

Man betrachte die lineare Abbildung

$$f\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}),\ f\colon p \mapsto p(2) + 2p - p'$$

auf dem Raum der Polynomfunktionen $P_3(\mathbb{R})$ mit der Basis $\mathcal{B} = (e_3, e_2, e_1, e_0)$, wobei $e_k(x) = x^k$ für $k = 0, 1, 2, 3$ gilt. Achten Sie jeweils darauf, Ihre Ergebnisse zu folgenden Aufgaben zu begründen!

(a) Man berechne die Darstellungsmatrix $A = A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$.

(b) Für die Matrix A aus Teil (a) wurde der Eigenvektor $(0, 0, -1, 1) \in \mathbb{R}^4$ zum Eigenwert λ berechnet. Geben Sie einen Eigenvektor von f zum selben Eigenwert λ an und finden Sie λ.

(c) Die Matrix A aus Teil (a) ist nicht diagonalisierbar. Gibt es eine Basis $\mathcal{A}$ von $P_3(\mathbb{R})$ derart, dass $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ diagonal ist?

Lösung von Aufgabe 3:

ad (a)

Es ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(e_3)(x) &= 2^3 + 2x^3 - 3x^2 = (2e_3 - 3e_2 + 8e_0)(x)\\
f(e_2)(x) &= 2^2 + 2x^2 - 2x = (2e_2 - 2e_1 + 4e_0)(x)\\
f(e_1)(x) &= 2^1 + 2x - 1 = (2e_1 + e_0)(x)\\
f(e_0)(x) &= 2^0 + 2x^0 - 0 = (3e_0)(x)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
f(e_3) &= 2e_3 - 3e_2 + 8e_0\\
f(e_2) &= 2e_2 - 2e_1 + 4e_0\\
f(e_1) &= 2e_1 + e_0\\
f(e_0) &= 3e_0.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 0\\ 8 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

ad (b)

Wenn $Ax = \lambda x$ gilt, dann folgt auch $f(v) = \lambda v$ ("Wörterbuch"), wobei v der Vektor mit dem Koordinatenvektor x bezüglich des Basis $\mathcal{B}$ ist und $A = A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ gilt. Damit ist also p mit $p(x) = 1 - x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von f. Weiter ist $f(p)(x) = (-2 + 1) + 2(1 - x) + 1 = -2x + 2 = 2(p(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit ist $\lambda = 2$ (kann man auch über A berechnen, wenn man die in (a) bestimmt hat!).

ad (c)

Eine lineare Abbildung f ist genau dann diagonalisierbar, wenn $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ diagonalisierbar ist ("Wörterbuch"). Deshalb kann f nicht diagonalisierbar sein, wenn A nicht diagonalsierbar ist. Wenn aber f nicht diagonalisierbar ist, dann gibt es auch keine Basis $\mathcal{A}$ derart, dass $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 4 (*Eigenwerte und Nullstellen des charakteristischen Polynoms*) (10)
Die folgende Aussage haben Sie bereits in der Vorlesung bewiesen. Beweisen Sie die Aussage erneut. Benutzen Sie dabei keine Aussagen über Eigenwerte oder das charakteristische Polynom, sondern argumentieren Sie auf Basis der folgenden Definitionen. Wir sagen $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein Eigenwert einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, falls es ein $v \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$ gibt mit $Av = \lambda v$. Weiter definieren wir $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda E_n)$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$. Man zeige $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn $p_A(\lambda) = 0$ gilt.

Lösung von Aufgabe 4: Es ist $\lambda \in \mathbb{K}$ also genau dann ein Eigenwert, wenn es ein $v \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$ mit $(A - \lambda E_n)v = 0$ gibt. Dies ist aber wiederum äquivalent dazu, dass $\ker(A - \lambda E_n) = \text{Lös}(A - \lambda E_n, 0) \neq \{0\}$ ist. Dies ist wiederum dazu äquivalent, dass $\text{rg}(A - \lambda E_n) < n$ gilt, was äquivalent dazu ist, dass $\det(A - \lambda E_n) = 0$ gilt. Wir haben also gezeigt, dass λ genau dann ein Eigenwert von A ist, wenn $p_A(\lambda) = 0$ gilt.

Aufgabe 5 (*Lineare Abbildungen auf invarianten Unterräumen*) (10+10)
Es sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung für einen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Weiter sei $U \subset V$ ein Untervektorraum mit $f(U) \subset U$ und $g\colon U \to U$ definiert über $g(u) = f(u)$ für $u \in U$, d.h. g ist die Restriktion von f auf U.

(a) Man zeige, dass $p_f(\lambda) = p_g(\lambda)q(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt. Dabei ist q ein geeignetes Polynom.
(b) Es sei f diagonalisierbar. Man zeige, dass g diagonalisierbar ist.

Hinweis: Man komplementiere eine Basis von U zu einer Basis von V und argumentiere auf einer entsprechenden Darstellungsmatrix (oder der Transponierten der Darstellungsmatrix in (b)).

Lösung von Aufgabe 5:
ad (a)
Es sei $\mathcal{A}$ eine Basis von U der Länge n (existiert, weil V und damit U endlich-dimensional ist). Man kann diese nach dem Basisergänzungssatz zu einer Basis $\mathcal{B}$ von V ergänzen ($|\mathcal{B}| = n + m$). Die Darstellungsmatrix von f bezüglich dieser Basis hat dann die Blockgestalt

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(g) & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$p_f(\lambda) = \det(A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda E_{n+m}) = \det(A_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(g) - \lambda E_n)\det(C - \lambda E_m) = p_g(\lambda)p_C(\lambda)$$

für $\lambda \in \mathbb{K}$.
ad (b)
Nun ist f genau diagonalisierbar, wenn $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ diagonalisierbar ist. Dies ist aber wiederum äquivalent dazu, dass $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^T$ diagonalisierbar ist. Wir wissen also, dass

$$\begin{pmatrix} A_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(g)^T & 0 \\ B^T & C^T \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist. Es sei nun $v_1, ...v_{n+m}$ eine Basis von Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_{n+m}$ dieser Matrix. Wir schreiben

$$v_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$

für $x_k \in \mathbb{K}^n$ und $y_k \in \mathbb{K}^m$. Dann folgt aus

$$\begin{pmatrix} A_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(g)^T & 0 \\ B^T & C^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$

die Gleichung $A_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(g)^T x_k = \lambda_k x_k$. Das System $x_1, ..., x_{n+m}$ erzeugt $\mathbb{K}^n$, weil $v_1, ..., v_{n+m}$ eine Basis von $\mathbb{K}^{n+m}$ war. Wir können also aus $x_1, ..., x_{n+m}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ auswählen, die wegen $A_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(g)^T x_k = \lambda_k x_k$ aus Eigenvektoren besteht. Damit ist $A_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(g)^T$ diagonalisierbar und folglich auch $A_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(g)$. Das impliziert aber, dass g diagonalisierbar ist.

Aufgabe 6 (*Multiple-Choice*) (21)

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. Es können mehrere Antworten pro Teilaufgabe richtig sein. Markieren Sie mit einem Kreuz alle richtigen Aussagen. Sie erhalten die volle Punktzahl der Teilaufgabe (3 Punkte), wenn Sie genau die richtigen Aussagen markiert haben. Je falsch gesetzem oder fehlendem Kreuz wird Ihnen ein Punkt von der Maximalpunktzahl der Teilaufgabe abgezogen. Die Punktzahl einer Teilaufgabe wird auf Null aufgerundet, sollte diese negativ sein. Die erreichte Punktzahl der Aufgabe entspricht der Summe der Punkte der Teilaufgaben.
Die Antworten sind auf ein gesondertes Antwortblatt für diese Aufgabe einzutragen.

(a) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v, u \in V$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Dann gilt:
☐ $1 \cdot v = v$ ☐ $v + v = 0$ impliziert $v = 0$ ☐ $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
☐ $u + v = v$ impliziert $u = 0$ ☐ $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ ☐ V ist endlich erzeugt

(b) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Welche Rechenregeln für die Determinante sind richtig?
☐ $\det(\lambda A) = \lambda \det A$ ☐ $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ ☐ $\det(AB) = \det B \cdot \det A$
☐ $\det(A + B) = \det A + \det B$ ☐ $\det C^{-1} = (\det C)^{-1}$ ☐ $\det(C^2) > 0$

(c) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n = \dim V < \infty$, $v_1, ..., v_m \in V$ linear unabhängig und $w_1, ..., w_k \in V$ erzeugend. Dann gilt:
☐ V ist endlich erzeugt ☐ $m \leq n$ ☐ $m \geq n$
☐ V ist isomorph zu $\mathbb{K}^n$ ☐ $k \leq n$ ☐ $k \geq n$

(d) Welche der folgenden Aussagen über Dimensionen sind richtig? Hierbei ist $P_n(\mathbb{R})$ der Raum der reellen Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$.
☐ $\dim_{\mathbb{R}} P_n(\mathbb{R}) = n$ ☐ $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$ ☐ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = n + 1$
☐ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$ ☐ $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{n\times m} = nm$ ☐ $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{n\times m} = n + m$

(e) Über die Diagonalisierbarkeit einer quadratischen komplexen Matrix A kann man folgende Aussagen treffen:
☐ A ist diagonalisierbar, falls p_A keine mehrfache Nullstelle hat.
☐ A ist diagonalisierbar, falls $S, T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ existieren, sodass SAT diagonal ist.
☐ A ist diagonalisierbar, falls es eine Basis von Eigenvektoren gibt.
☐ Gilt $A^5 = 0$ aber $A \neq 0$, dann ist A nicht diagonalisierbar.
☐ Hat $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ einen komplexen nicht-reellen Eigenwert, dann ist A komplex diagonalisierbar.
☐ Hat $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ nur zwei verschiedene Eigenwerte, dann ist A nicht komplex diagonalisierbar.

(f) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine isometrische Abbildung. Dann gilt:
☐ f ist affin. ☐ f ist linear. ☐ f ist eine Spiegelung oder Drehung falls $n = 2$ und $f(0) = 0$.
☐ f ist eine Spiegelung oder Drehung falls $n = 3$ und $f(0) = 0$. ☐ Alle Eigenwert von f sind reell, falls f linear ist. ☐ Alle Eigenwerte haben Betrag 1, falls f linear ist.

(g) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und es gelte $A^T = A$ und $B^T = B$. Dann gilt:
☐ A ist diagonalisierbar. ☐ B ist diagonalisierbar. ☐ Es gibt $S \in O(n)$ mit SBS^T diagonal.
☐ Es gibt $S \in SO(n)$ mit SBS^T diagonal. ☐ Es gibt $S, T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit SAT diagonal.
☐ Alle Eigenwerte von B sind reell.

Lösung von Aufgabe 6:

(a) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v, u \in V$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

☒ $1 \cdot v = v$ ☐ $v + v = 0$ impliziert $v = 0$ ☒ $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
☒ $u + v = v$ impliziert $u = 0$ ☒ $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ ☐ V ist endlich erzeugt

(b) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Welche Rechenregeln für die Determinante sind richtig?

☐ $\det(\lambda A) = \lambda \det A$ ☒ $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ ☒ $\det(AB) = \det B \cdot \det A$
☐ $\det(A + B) = \det A + \det B$ ☒ $\det C^{-1} = (\det C)^{-1}$ ☒ $\det(C^2) > 0$

(c) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n = \dim V < \infty$, $v_1, ..., v_m \in V$ linear unabhängig und $w_1, ..., w_k \in V$ erzeugend. Dann gilt:

☒ V ist endlich erzeugt ☒ $m \leq n$ ☐ $m \geq n$
☒ V ist isomorph zu $\mathbb{K}^n$ ☐ $k \leq n$ ☒ $k \geq n$

(d) Welche der folgenden Aussagen über Dimensionen sind richtig? Hierbei ist $P_n(\mathbb{R})$ der Raum der reellen Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$.

☐ $\dim_{\mathbb{R}} P_n(\mathbb{R}) = n$ ☒ $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$ ☐ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = n + 1$
☒ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$ ☒ $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{n\times m} = nm$ ☐ $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{n\times m} = n + m$

(e) Über die Diagonalisierbarkeit einer quadratischen komplexen Matrix A kann man folgende Aussagen treffen:

☒ A ist diagonalisierbar, falls p_A keine mehrfache Nullstelle hat.

☐ A ist diagonalisierbar, falls $S, T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ existieren, sodass SAT diagonal ist.
☒ A ist diagonalisierbar, falls es eine Basis von Eigenvektoren gibt.

☒ Gilt $A^5 = 0$ aber $A \neq 0$, dann ist A nicht diagonalisierbar.

☒ Hat $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ einen komplexen nicht-reellen Eigenwert, dann ist A komplex diagonalisierbar.

☐ Hat $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ nur zwei verschiedene Eigenwerte, dann ist A nicht komplex diagonalisierbar.

(f) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine isometrische Abbildung. Dann gilt:

☒ f ist affin. ☐ f ist linear. ☒ f ist eine Spiegelung oder Drehung falls $n = 2$ und $f(0) = 0$.

☐ f ist eine Spiegelung oder Drehung falls $n = 3$ und $f(0) = 0$. ☐ Alle Eigenwert von f sind reell, falls f linear ist. ☒ Alle Eigenwerte haben Betrag 1, falls f linear ist.

(g) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und es gelte $A^T = A$ und $B^T = B$. Dann gilt:

☐ A ist diagonalisierbar. ☒ B ist diagonalisierbar. ☒ Es gibt $S \in O(n)$ mit SBS^T diagonal. ☒ Es gibt $S \in SO(n)$ mit SBS^T diagonal. ☒ Es gibt $S, T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit SAT diagonal. ☒ Alle Eigenwerte von B sind reell.