ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

# Zwischentest Lineare Algebra 1

Achten Sie auf vollständige, saubere und schlüssige Argumentation! 100 Punkte sind 100%.

## Inhaltsverzeichnis

**Aufgabe 1** (*Dimension und Basis bestimmen*) (15)
Man betrachte die folgende Teilmenge von $\mathbb{C}^4$:

$$U = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2+i \\ 2+i \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} i-1 \\ i \\ i \\ i \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;:\; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \right\}$$

Man bestimme eine Basis und die Dimension von $U$ als $\mathbb{C}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}^4$.

*Lösung von Aufgabe 1:* Man kann die Lösung berechnen indem man die Vektoren in die Zeilen einer Matrix schreibt und diese über elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringt. Aus der Zeilenstufenform ist dann eine Basis ablesbar.
Es geht aber auch direkt eine Manipulation auf dem Aufspan. Genauer ist

$$\begin{aligned}
U &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2+i \\ 2+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i-1 \\ i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i-1 \\ i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i-1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (1-i)\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, i\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Man erkennt nun, dass

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig ist und $U$ erzeugt. Damit ist dies eine Basis für $U$. Die Dimension des Raumes ist also 2.

**Aufgabe 2** (*Gleichungssysteme*) (20)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Man bestimme die Lösung der Gleichung $AX = B$ für $X \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ (*Hinweis:* $\operatorname{rg} A = 3$).
(b) Man finde eine Parametrisierung der Lösungsmenge von $Bx = b$ für $x \in \mathbb{R}^5$.
(c) Handelt es sich bei $\text{Lös}(C, b)$ um eine Ebene (mit Begründung!)?

*Lösung von Aufgabe 2:*
**ad (a):** Wegen dem Hinweis ist klar, dass $A$ invertierbar ist (voller Rang). Es ist damit $AX = B$ äquivalent zu $X = A^{-1}B$. Wir berechnen deshalb die Inverse von $A$ (nur Zeilenumformungen werden benutzt!):

$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$
$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Es ergibt sich also

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

wir erhalten also

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**ad (b):** Wir berechnen die Parametrisierung der Lösungsmenge über den Gauß-Algorithmus (wir verwenden nur Zeilenoperationen):

$$(B|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Die Matrix ist nun in Zeilenstufenform. Über die Rückwärtssubstitution können wir eine spezielle Lösung

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und genauso eine Basis der homogenen Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge ist also in parametrisierter Form gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

**ad (c):** Wir könne ablesen (beide sind in Zeilenstufenform!):

$$\operatorname{rg} C = 3 = \operatorname{rg}(C|b)$$

Damit ist also

$$\text{Lös}(C, b) \neq \emptyset$$

und weiter auch $\text{Lös}(C, b)$ ein affiner Raum der Dimension $5 - \operatorname{rg} C = 2$. Ein affiner Raum der Dimension 2 ist aber eine Ebene und damit ist $\text{Lös}(C, b)$ eine Ebene.

**Aufgabe 3** (*Darstellungsmatrizen*) (15)
Man betrachte eine lineare Abbildung $F\colon V \to W$ zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen von Polynomfunktionen $V = P_3(\mathbb{R}) = \langle\langle e_3, e_2, e_1, e_0\rangle\rangle$ und $W = P_5(\mathbb{R}) = \langle\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_0\rangle\rangle$ definiert über

$$F(p)\colon x \mapsto x^2 p(x) + p(-1)x^5 + p(2) + p(-2).$$

Man berechne die Darstellungsmatrix $A(F)$ bezüglich der Basen (mit angegebener Reihenfolge der Vektoren!). Dabei gilt $e_k(x) = x^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k = 0, ..., 5$.

*Lösung von Aufgabe 3:* Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$F(e_3)(x) = x^5 - x^5 + 8 - 8 = 0.$$

Damit ist

$$F(e_3) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 + 0 \cdot e_5 + 0 \cdot e_0.$$

Genauso gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ auch

$$F(e_2)(x) = x^4 + x^5 + 4 + 4 = x^5 + x^4 + 8.$$

Es folgt also wieder

$$F(e_2) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 1 \cdot e_4 + 1 \cdot e_5 + 8 \cdot e_0.$$

Ebenso folgt aus

$$F(e_1)(x) = x^3 - x^5 + 2 - 2 = -x^5 + x^3, F(e_0)(x) = x^2 + x^5 + 2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt also wieder

$$F(e_1) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 + (-1) \cdot e_5 + 0 \cdot e_0$$

und

$$F(e_0) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 + 1 \cdot e_5 + 2 \cdot e_0.$$

Die Koeffizenten müssen wir nun in der Reihenfolge in die Spalten der Matrix schreiben. Es gilt also

$$A(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 4** (*Die Heisenberggruppe*) (10)

Man zeige, dass die folgende Menge zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$$

*Lösung von Aufgabe 4:* Für eine Gruppe müssen wir nachweisen: Abgeschlossenheit, Assoziativität, neutrales Element, inverses Element

*Abgeschlossenheit:* Es seien

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \\ 0 & 1 & 0 & \tilde{d} \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G,$$

dann gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \\ 0 & 1 & 0 & \tilde{d} \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}+a & \tilde{b}+b & c+\tilde{c}+a\tilde{d}+b\tilde{e} \\ 0 & 1 & 0 & \tilde{d}+d \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{e}+e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

*Assoziativität:* Die Assoziativität der Matrixmultiplikation ist klar (nach Vorlesung).

*Existenz des neutralen Elements:* Es ist $E_4 \in G$ (offensichtlich). Weiter ist $A = E_4 A = A E_4$ für alle $A \in G$. Deshalb ist $E_4$ das neutrale Element.

*Existenz des inversen Elements:* Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

gegeben. Man kann nun entweder indem man die Inverse mit dem Algorithmus berechnet, oder die Formel für das Produkt (siehe Abgeschlossenheit) benutzt, Folgendes feststellen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -b & -c+ad+be \\ 0 & 1 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 1 & -e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

und wegen $A^{-1}A = AA^{-1} = E_4$ ist $A^{-1}$ tatsächlich das gesuchte Inverse zu $A$.

Wir haben damit nachgewiesen, dass es sich um eine Gruppe handelt. Apropos diese Gruppe ist nicht abelsch.

**Aufgabe 5** (*Produkt von Vektorräumen*) (10)
Es sei $V = \langle\langle v_1, ..., v_n\rangle\rangle$ und $W = \langle\langle w_1, ..., w_m\rangle\rangle$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Die Menge $V \times W$ mit $(v, w) + (\tilde{v}, \tilde{w}) = (v + \tilde{v}, w + \tilde{w})$ und $\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$ für $(v, w), (\tilde{v}, \tilde{w}) \in V \times W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (dies müssen Sie nicht zeigen).

(a) Man zeige, dass $(v_1, 0), ..., (v_n, 0), (0, w_1), ..., (0, w_m) \in V \times W$ eine Basis von $V \times W$ ist.
(b) Man bestimme $\dim(V \times W)$ (mit Begründung!).

*Lösung von Aufgabe 5:*
**ad (a):** Wir müssen nachweisen, dass $(v_1, 0), ..., (v_n, 0), (0, w_1), ..., (0, w_m) \in V \times W$ erzeugend und linear unabhängig ist.
*erzeugend:* Es sei $z \in V \times W$ beliebig aber fest gegeben. Dann finde ich $v \in V$ und $w \in W$ mit $z = (v, w)$. Weil $v_1, ..., v_n$ nach Voraussetzung eine Basis für $V$ ist, gibt es $\alpha_k \in \mathbb{K}$ $(k = 1, ..., n)$ mit

$$v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k.$$

Genauso folgt aus $w \in W$, dass es $\beta_l \in \mathbb{K}$ $(l = 1, ..., m)$ mit

$$w = \sum_{l=1}^{m} \beta_l w_l.$$

Dann ist aber

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(v_k, 0) + \sum_{l=1}^{m} \beta_l(0, w_l) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k, 0\right) + \left(0, \sum_{l=1}^{m} \beta_l w_l\right) = (v, 0) + (0, w) = (v, w) = z.$$

Da $z \in V \times W$ beliebig war, haben wir gezeigt, dass das System erzeugend ist.
*linear unabhängig:* Es seien $\alpha_k \in \mathbb{K}$ $(k = 1, ..., n)$ und $\beta_l \in \mathbb{K}$ $(l = 1, ..., m)$ beliebig aber fest mit

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(v_k, 0) + \sum_{l=1}^{m} \beta_l(0, w_l) = 0$$

gegeben. Wir müssen zeigen, dass $\alpha_k = \beta_l = 0$ für $l = 1, ..., m$ und $k = 1, ..., n$ gilt. Es ist

$$(0, 0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(v_k, 0) + \sum_{l=1}^{m} \beta_l(0, w_l) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k, 0\right) + \left(0, \sum_{l=1}^{m} \beta_l w_l\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k, \sum_{l=1}^{m} \beta_l w_l\right)$$

und damit ist (einzelne Komponenten betrachten!)

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$$

und

$$0 = \sum_{l=1}^{m} \beta_l w_l.$$

Nun ist aber $v_1, ..., v_n$ und $w_1, ..., w_m$ linear unabhängig (weil Basis von $V$ bzw. $W$). Deshalb folgt aus der ersten Gleichung $\alpha_k = 0$ für $k = 1, ..., n$ und aus der zweiten $\beta_l = 0$ für $l = 1, ..., m$. Wir haben also gezeigt, dass das System eine Basis ist.
**ad (b):** Aus (a) wissen wir, dass $(v_1, 0), ..., (v_n, 0), (0, w_1), ..., (0, w_m) \in V \times W$ eine Basis ist. Diese besteht aus $n + m$ Elementen. Es ist damit $\dim(V + W) = n + m = \dim V + \dim W$.

**Aufgabe 6** (*Gleichzeitige Basisauswahl und Basisergänzung*) (10)
Es sei $V = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, ..., v_m$ $(m \leq n)$ sei linear unabhängig. Man zeige, dass es eine Basis $B \subset V$ gibt mit

$$\{v_1, ..., v_m\} \subset B \subset \{v_1, ..., v_n\}.$$

*Lösung von Aufgabe 6:* Nach dem Basisauswahlsatz ($v_1, ..., v_n$ ist erzeugend!) gibt es eine Basis $B' \subset \{v_1, ..., v_n\}$. Der Basisaustauschsatz impliziert, dass man Vektoren aus $B'$ durch die Vektoren $v_1, ..., v_m$ ersetzen kann ($v_1, ..., v_m$ ist linear unabhängig!). Wir finden also ein $B$ mit $B \subset B' \cup \{v_1, ..., v_m\} \subset \{v_1, ..., v_n\}$ mit $B \supset \{v_1, ..., v_m\}$, welches eine Basis ist.

**Aufgabe 7** (*Annullierende Polynome*) (20)

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gegeben. Wir setzen

$$p(A) := \sum_{k=0}^{m} a_k A^k,$$

für ein Polynom $p = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{K}_m[X]$.

(a) Man zeige, dass es ein Polynom $p \in \mathbb{K}_{n^2}[X] \backslash \{0\}$ mit $p(A) = 0$ gibt.

(b) Es sei $p \in \mathbb{K}_m[X]$ mit $p(0) \neq 0$ und $p(A) = 0$. Man zeige, dass $A$ invertierbar ist.

*Lösung von Aufgabe 7:*

**ad (a):** Es gibt mehrere Beweise dieser Aussage. Wir geben einen an:

Der Vektorraum $\mathbb{K}^{n \times n}$ hat die Dimension $n^2$. Damit ist das System

$$E_n, A, A^2, A^3, ..., A^n, A^{n+1}, ..., A^{n^2}$$

bestehend aus $n^2 + 1$ Vektoren linear abhängig (Basisergänzungsatz). Es gibt also $\alpha_k \in \mathbb{K}$ ($k = 0, ..., n^2$) mit

$$\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k A^k = 0,$$

wobei nicht alle $\alpha_k$ Null sind. Damit ist

$$p = \sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}_{n^2}[X] \backslash \{0\}$$

und es gilt

$$p(A) = \sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k A^k = 0$$

wie verlangt.

**ad (b):** Es ist

$$p = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k X^k$$

mit $\alpha_0 \neq 0$ und $p(A) = 0$. Damit ist

$$E_n = -\alpha_0^{-1} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k A^k = \left( -\alpha_0^{-1} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k A^{k-1} \right) A = A \left( -\alpha_0^{-1} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k A^{k-1} \right).$$

Damit ist $A$ invertierbar mit

$$A^{-1} = -\alpha_0^{-1} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k A^{k-1} = -\alpha_0^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{k+1} A^k.$$

**Aufgabe 8** (*Multiple-Choice*) (21)

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. Es können mehrere Antworten pro Teilaufgabe richtig sein. Markieren Sie mit einem Kreuz alle richtigen Aussagen. Sie erhalten die volle Punktzahl der Teilaufgabe (3 Punkte), wenn Sie genau die richtigen Aussagen markiert haben. Je falsch gesetzem oder fehlendem Kreuz wird Ihnen ein Punkt von der Maximalpunktzahl der Teilaufgabe abgezogen. Die Punktzahl einer Teilaufgabe wird auf Null aufgerundet, sollte diese negativ sein. Die erreichte Punktzahl der Aufgabe entspricht der Summe der Punkte der Teilaufgaben.
Für die Antworten steht Ihnen ein gesondertes Blatt zur Verfügung.

(a) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, dann gilt
$\square$ $(\mathbb{K}, \cdot)$ ist eine Gruppe $\square$ $1+1+1+1 \neq 0$ $\square$ $\lambda\mu = 0$ impliziert $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$
$\square$ $(\mathbb{K}, +)$ ist eine Gruppe $\square$ $(\mathbb{K}, -)$ ist eine Gruppe $\square$ $\operatorname{char} \mathbb{K}$ ist eine Primzahl

(b) Es sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v, u \in V$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann gilt
$\square$ $1 \cdot v = v$ $\square$ $v + v = 0$ impliziert $v = 0$ $\square$ $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
$\square$ $u + v = v$ impliziert $u = 0$ $\square$ $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ $\square$ $V$ ist endlich erzeugt

(c) Wir betrachten $\Phi\colon \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ definiert über $\Phi(A) = F_A$ mit $F_A\colon x \mapsto Ax$ wie in der Vorlesung. Sei nun $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times k}$ und $C \in \mathrm{GL}(n)$. Dann gilt
$\square$ $\Phi$ ist ein Isomorphismus $\square$ $F_A$ injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = m$ $\square$ $F_A$ injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n$
$\square$ $F_{AB} = F_A \circ F_B$ $\square$ $F_{C^{-1}} = (F_C)^{-1}$ $\square$ $\Phi$ ist linear

(d) Es sei $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $C \in \mathbb{K}^{n\times k}$. Dann gilt
$\square$ $(A + B)^T = A^T + B^T$ $\square$ $(AC)^T = A^T C^T$ $\square$ $F_{A^T} = F_A^{-1}$
$\square$ $\operatorname{rg} A^T = \operatorname{rg} A$ $\square$ $(A^T)^T = A$ $\square$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} F_A$

(e) Es seien $U_1, U_2$ **verschiedene** Untervektorräume der Dimension 3 von $\mathbb{R}^7$. Was ist unter den Voraussetzungen möglich?
$\square$ $\dim(U_1 + U_2) = 6$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$ $\square$ $\dim(U_1 + U_2) = 7$ $\square$ $\dim(U_1 + U_2) = 6$
$\square$ $\dim(U_1 + U_2) = 5$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$ $\square$ $\dim(U_1 + U_2) = 4$ $\square$ $\dim(U_1 + U_2) = 3$

(f) Es gibt injektive Abbildungen der folgenden Gestalt:
$\square$ $f\colon \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$ $\square$ $f\colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$ $\square$ $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
$\square$ $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $\square$ $f\colon \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $\square$ $f\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{P}(\mathbb{R})$

(g) Es seien $V, W$ endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f\colon V \to W$ linear. Gehen Sie ab der zweiten Aussage davon aus, dass es eine Basis $\mathcal{A}$ von $V$ und eine Basis $\mathcal{B}$ von $W$ gibt mit

$$A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

$\square$ Man findet stets $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wie oben. $\square$ $r = \operatorname{rg} f$ $\square$ $f = \mathrm{id}_V \Leftrightarrow \dim V = r$ und $V = W$
$\square$ $f$ injektiv $\Leftrightarrow \dim V = r$ $\square$ $f$ bijektiv $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$ $\square$ $f$ surjektiv $\Leftrightarrow \dim W = r$

*Lösung von Aufgabe 8:*

(a) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, dann gilt

$\square$ $(\mathbb{K}, \cdot)$ ist eine Gruppe $\square$ $1+1+1+1 \neq 0$ $\boxtimes$ $\lambda\mu = 0$ impliziert $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$
$\boxtimes$ $(\mathbb{K}, +)$ ist eine Gruppe $\square$ $(\mathbb{K}, -)$ ist eine Gruppe $\square$ $\operatorname{char} \mathbb{K}$ ist eine Primzahl

(b) Es sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v, u \in V$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann gilt

$\boxtimes$ $1 \cdot v = v$ $\boxtimes$ $v + v = 0$ impliziert $v = 0$ $\boxtimes$ $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
$\boxtimes$ $u + v = v$ impliziert $u = 0$ $\boxtimes$ $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ $\square$ $V$ ist endlich erzeugt

(c) Wir betrachten $\Phi\colon \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ definiert über $\Phi(A) = F_A$ mit $F_A\colon x \mapsto Ax$ wie in der Vorlesung. Sei nun $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times k}$ und $C \in \mathrm{GL}(n)$. Dann gilt

$\boxtimes$ $\Phi$ ist ein Isomorphismus $\square$ $F_A$ injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = m$ $\boxtimes$ $F_A$ injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n$
$\boxtimes$ $F_{AB} = F_A \circ F_B$ $\boxtimes$ $F_{C^{-1}} = (F_C)^{-1}$ $\boxtimes$ $\Phi$ ist linear

(d) Es sei $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $C \in \mathbb{K}^{n\times k}$. Dann gilt

☒ $(A+B)^T = A^T + B^T$ ☐ $(AC)^T = A^T C^T$ ☐ $F_{A^T} = F_A^{-1}$
☒ $\operatorname{rg} A^T = \operatorname{rg} A$ ☒ $(A^T)^T = A$ ☒ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} F_A$

(e) Es seien $U_1, U_2$ **verschiedene** Untervektorräume der Dimension 3 von $\mathbb{R}^7$. Was ist unter den Voraussetzungen möglich?

☒ $\dim(U_1 + U_2) = 6$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$ ☐ $\dim(U_1 + U_2) = 7$ ☒ $\dim(U_1 + U_2) = 6$
☐ $\dim(U_1 + U_2) = 5$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$ ☒ $\dim(U_1 + U_2) = 4$ ☐ $\dim(U_1 + U_2) = 3$

(f) Es gibt injektive Abbildungen der folgenden Gestalt:

☒ $f\colon \{1,2\} \to \{1,2,3\}$ ☐ $f\colon \{1,2,3\} \to \{1,2\}$ ☒ $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
☒ $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ☐ $f\colon \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ☒ $f\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{P}(\mathbb{R})$

(g) Es seien $V, W$ endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f\colon V \to W$ linear. Gehen Sie ab der zweiten Aussage davon aus, dass es eine Basis $\mathcal{A}$ von $V$ und eine Basis $\mathcal{B}$ von $W$ gibt mit

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

☒ Man findet stets $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wie oben. ☒ $r = \operatorname{rg} f$ ☐ $f = \mathrm{id_V} \Leftrightarrow \dim V = r$ und $V = W$
☒ $f$ injektiv $\Leftrightarrow \dim V = r$ ☐ $f$ bijektiv $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$ ☒ $f$ surjektiv $\Leftrightarrow \dim W = r$