ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2016/2017

Übungsblatt 1

Harmonische Analysis

Übungsaufgaben sind abzugeben am Freitag **28.10.2016** um spätestens **10ct**.

Aufgabe 1 (*Banachräume*) (10)
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $p \in [1, \infty)$. Man betrachte die folgende Menge

$$\ell^p_X := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^p < \infty \right\}.$$

Wir definieren weiter

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p_X} := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Man zeige, dass $(\ell^p_X, \|\cdot\|_{\ell^p_X})$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 2 (*Nützliche Formel für L^p-Normen*) (10)
Diese Aufgabe ist in der Tat nicht so schwer. Die Formel ist aber wichtig für die harmonische Analyse, weswegen wir hier einen besonderen Wert darauf legen. Es sei dazu (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p \in (0, \infty)$. Weiter sei $f\colon \Omega \to [0, \infty]$ eine Σ-messbare Funktion. Man zeige, dass

$$(0, \infty) \ni \lambda \to \lambda^{p-1} \mu\left(\{f \geq \lambda\}\right)$$

eine $\mathcal{B}((0, \infty))$-messbare Funktion ist und

$$\int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu\left(\{f \geq \lambda\}\right) \mathrm{d}\lambda$$

gilt.

Aufgabe 3 (*Messbarkeit vektorwertiger Funktionen*) (10)
Es sei X ein Banachraum. Für $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ offen betrachten wir den Maßraum $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Borel-Maß ist. Es sei nun $f\colon \Omega \to X$ stetig. Man zeige, dass f messbar ist.

Aufgabe 4 (*Bochner Integral*) (10)
Es sei $f\colon [0, 1] \to \ell^p$ für $p \in [1, \infty)$ eine Bochner integrierbare Funktion. Man zeige, dass jede Koordinatenfunktion f_n Lebesgue-integrierbar ist (d.h. $f(t) = (f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$) und beweise

$$\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t = \left(\int_0^1 f_n(t) \, \mathrm{d}t \right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Aufgabe 5 (*Separabilität*) (10*)
Es sei $p \in [1, \infty)$ und λ das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathcal{B}(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ messbar. Man zeige, dass $L^p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda)$ separabel ist.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe 6 (5*+5*)

(a) Man zeige, dass ℓ^∞ nicht separabel ist.

(b) Es sei $x \in \ell^p$ für ein $p \in [1, \infty)$ gegeben. Man zeige, dass $x \in \ell^q$ für alle $q \geq p$ ist und

$$\|x\|_{\ell^\infty} = \lim_{q \to \infty} \|x\|_{\ell^q}$$

gilt. Die ℓ^∞-Norm passt also gut in die ℓ^p-Norm-Skala.

Zusatzaufgabe 7 (*Messbarkeit vektorwertiger Funktionen II*) (5*+5*)

(a) Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $A \subset X'$ eine abzählbare normierende Menge, d.h.

$$\sup_{x' \in A \setminus \{0\}} \frac{|\langle x, x' \rangle|}{\|x'\|} = \|x\|.$$

Man zeige, dass $f \colon \Omega \to X$ genau dann messbar ist, wenn f fast separabelwertig und $\langle f, x' \rangle$ für alle $x' \in A$ bereits $\tilde{\Sigma}$-messbar ist.

(b) Es sei $f \colon [0,1] \to C([0,1])$ eine Funktion ($C([0,1])$ ist der Banachraum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit der Supremumsnorm). Man zeige, dass f genau dann messbar ist, wenn für jedes $t \in [0,1]$ die Funktion $(f(\cdot))(t)$ Lebesgue-messbar ist.

Zusatzaufgabe 8 (*Bochner Integral II*) (10*)

Es seien $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume, $p \in [1, \infty]$, und $\Sigma = \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$. Weiter sei $f \colon \Omega_1 \to \mathcal{L}^p(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ derart, dass

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto (f(\omega_1))(\omega_2)$$

$\tilde{\Sigma}$-messbar ist und die induzierte Funktion $f \colon \Omega_1 \to L^p(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ Bochner integrierbar ist. Man beweise, dass für fast alle $\omega_2 \in \Omega_2$ die Funktion

$$\omega_1 \mapsto \left(\tilde{f}(\omega_1)\right)(\omega_2)$$

$\tilde{\Sigma}_1$-integrierbar ist und für fast alle $\omega_2 \in \Omega_2$

$$\int_{\Omega_1} (f(\omega_1))\,(\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_1(\omega_1) = \left(\int_{\Omega_1} \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu_1\right)(\omega_2)$$

gilt.

Bemerkung: Man kann zeigen (ist aber nicht verlangt), dass für beliebige messbare $\tilde{f} \colon \Omega_1 \to L^p(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ stets ein $f \colon \Omega_1 \to \mathcal{L}^p(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ existiert, dass die Eigenschaften in der Voraussetzung hat. Also, dass $f(\omega_1)$ ein *geeigneter* Vertreter von $\tilde{f}(\omega_1)$ für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ ist und

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto (f(\omega_1))(\omega_2)$$

$\tilde{\Sigma}$-messbar ist.