ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2016/2017

Übungsblatt 2

Harmonische Analysis

Übungsaufgaben sind abzugeben am Freitag **4.11.2016** um spätestens **10ct**.

Aufgabe 1 (*automatisch vektorwertige Erweiterung für L^1*) (10)
Es seien $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ Maßräume und $T\colon L^1(\Omega_1) \to L^1(\Omega_2)$ ein beschränkter linearer Operator. Man zeige, dass es für einen Banachraum X genau einen beschränkten linearen Operator $S\colon L^1(\Omega_1, X) \to L^1(\Omega_2, X)$ gibt, derart, dass

$$S(f \cdot x) = T(f)x$$

für alle $f \in L^1(\Omega_1)$ und $x \in X$ gilt.
Bemerkung: Wir werden später sehen, dass dies nicht gilt, wenn man L^1 durch L^p für $p \in (1, \infty)$ ersetzt.

Aufgabe 2 (*Bochnerräume und Produkträume*) (10)
Es seien $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ zwei Maßräume und $p \in [1, \infty)$. Man finde einen isometrischen Isomorphismus

$$T\colon L^p(\Omega_1 \times \Omega_2) \to L^p(\Omega_1, L^p(\Omega_2)).$$

Aufgabe 3 (*homogene Wärmeleitungsgleichung*) (10)
Es sei $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n, X)$ gegeben ($p \in [1, \infty)$, X ein Banachraum). Man zeige, dass (dabei ist $|\cdot|$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$)

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y) \, \mathrm{d}y$$

für festes $t > 0$ und fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert ist, auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ eine glatte Funktion definiert, die Gleichung $u_t = \Delta u$ (dabei ist $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$) auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ löst, sowie $u(t, \cdot) \to u_0$ für $t \to 0+$ in $L^p(\mathbb{R}^n, X)$ und

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n, X)} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n, X)}$$

gilt.

Aufgabe 4 (*Existenz von Testfunktionen*) (10)
Es seien $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $A \subset B$ kompakt. Man finde eine nicht-negative Funktion $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit Werten in $[0, 1]$ derart, dass $\phi(x) = 1$ für alle $x \in A$ und $\phi(x) = 0$ für alle $x \notin B$ gilt.

Aufgabe 5 (*Vektorwertige L^p-Räume*) (10*)
Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und X ein Banachraum. Man zeige, dass $L^p(\Omega, X)$ wie in der Vorlesung definiert ein Banchraum ist.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe 6 (*Littlewood-Paley Partition der Eins*) (10*)
Man zeige, dass es $\phi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ gibt mit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\phi = 0$ außerhalb von $(-4,-1) \cup (1,4)$, und

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(2^n x) = 1$$

für alle $x \neq 0$. Warum macht die Reihe auf der linken Seite Sinn?

Zusatzaufgabe 7 (*Isometrische Kopie von ℓ^2 in L^p*) (10*)
Bekanntlich (dies müssen Sie nicht zeigen) gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ auf dem es eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen gibt. Weiter sei c_{00} der Raum der Folgen mit endlichem Träger (d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt in c_{00} genau dann, wenn $x_n = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt). Man zeige, dass die Abbildung

$$c_{00} \to L^p(\Omega),\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto c_p \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n X_n$$

für ein geeignetes festes $c_p > 0$ (abhängig von $p \in [1,\infty)$) sich zu einer isometrischen Abbildung

$$\ell^2 \to L^p(\Omega)$$

fortsetzt.

Zusatzaufgabe 8 (*Inhomogene Wärmeleitungsgleichung*) (10*)
Es sei $f \in \mathcal{D}((0,T) \times \mathbb{R}^n)$ und $p \in [1,\infty)$ gegeben. Man zeige, dass (dabei ist $|\cdot|$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$)

$$u(t,x) = \int_0^t \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4s}\right) f(t-s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$$

die Gleichung $u_t = \Delta u + f$ (dabei ist $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$) auf $(0,T) \times \mathbb{R}^n$ löst, dass $u(t,x) \to 0$ für $t \to 0+$ für alle x konvergiert und

$$\|u\|_{L^p((0,T)\times\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L^p((0,T)\times\mathbb{R}^n)}$$

für ein $C > 0$ (unabhängig von f) gilt. Man zeige weiter, dass es kein $C_1 > 0$ (unabhängig von f) gibt mit

$$\|u_t\|_{L^1((0,T)\times\mathbb{R}^n)} \le C_1\|f\|_{L^1((0,T)\times\mathbb{R}^n)}.$$

Bemerkung: Wir werden später eventuell sehen, dass es aber $C_p > 0$ für $p \in (1,\infty)$ (unabhängig von f) gibt mit

$$\|u_t\|_{L^p((0,T)\times\mathbb{R}^n)} \le C_p\|f\|_{L^p((0,T)\times\mathbb{R}^n)}.$$