ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2016/2017

Übungsblatt 3

Harmonische Analysis

Übungsaufgaben sind abzugeben am Freitag **11.11.2016** um spätestens **10ct**.

Aufgabe 1 (*Fourierreihen berechnen*) (10)
Es sei $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ gegeben. Man berechne $\hat{f}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (*Dirichletkern*) (10)
Man zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$ fest ($x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$)

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

gilt. Man zeige zudem, dass $\|D_n\|_{L^1(-\pi,\pi)}$ gegen Unendlich geht für $n \to \infty$.

Aufgabe 3 (*Funktionen zu gegebener Fourierreihe finden*) (10)
Man finde eine einfache Darstellung für eine Funktion $g\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ mit $\hat{g}(k) = k^{-2}$ für alle $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ und $\hat{g}(0) = 0$ und berechne damit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}.$$

Aufgabe 4 (*L^p-wertige Erweiterung für Operatoren auf L^p*) (10)
Es seien $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ und $(\Omega_3, \Sigma_3, \mu_3)$ Maßräume und $T\colon L^p(\Omega_1) \to L^p(\Omega_2)$ ein beschränkter linearer Operator (für $p \in [1,\infty)$). Man zeige, dass es genau einen beschränkten linearen Operator $S\colon L^p(\Omega_1, L^p(\Omega_3)) \to L^p(\Omega_2, L^p(\Omega_3))$ gibt, derart, dass

$$S(f \cdot x) = T(f)x$$

für alle $f \in L^p(\Omega_1)$ und $x \in L^p(\Omega_3)$ gilt.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe 5 (*Gibbssches Phänomen*) (10*)
Es sei $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ gegeben (man vgl. Aufgabe 1). Wir setzen $x_n = \pi - \pi n^{-1}$ und

$$y_n = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx_n}.$$

Man zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 2\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x > \pi$$

gilt.

Zusatzaufgabe 6 (*Im Allgemeinen keine automatische vektorwertige Erweiterung*) (10*)
Es sei $\mathcal{F}\colon L^2(-\pi,\pi) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ die Abbildung, die f auf die Fourier-Reihe $\mathcal{F}f = \hat{f}$ abbildet. Man zeige, dass es i.A. für einen Banachraum X keinen beschränkten linearen Operator $S\colon L^2((-\pi,\pi),X) \to \ell^2(\mathbb{Z},X)$ gibt mit $S(f\cdot x) = \mathcal{F}(f)x$ für $f \in L^2(-\pi,\pi)$ und $x \in X$.

Zusatzaufgabe 7 (*hilbertraumwertige Erweiterung für Operatoren auf L^p*) (10*)
Es seien $(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)$ und $(\Omega_2,\Sigma_2,\mu_2)$ Maßräume und $T\colon L^p(\Omega_1) \to L^p(\Omega_2)$ ein beschränkter linearer Operator (für $p \in [1,\infty)$). Man zeige, dass es für einen Hilbertraum H genau einen beschränkten linearen Operator $S\colon L^p(\Omega_1,H) \to L^p(\Omega_2,H)$ gibt, derart, dass

$$S(f\cdot x) = T(f)x$$

für alle $f \in L^p(\Omega_1)$ und $x \in H$ gilt (Man benutze Zusatzaufgabe 7 von Blatt 2).

Zusatzaufgabe 8 (*Existenz einer stetigen Funktion mit divergener Fourierreihe*) (10*)
Für einen machbaren Beweis dieser Aufgabe benötigt man einen Satz aus der Funktionalanalysis (siehe Hinweis). Man zeige, dass es eine stetige Funktion $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(\pi) = f(-\pi)$ gibt für die

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) = \infty$$

gilt. Insbesondere ist die Fourierreihe von f an der Stelle 0 nicht konvergent.