ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2016/2017

Übungsblatt 4

Harmonische Analysis

Übungsaufgaben sind abzugeben am Freitag **18.11.2016** um spätestens **10ct**.

Aufgabe 1 (*Punktweise Konvergenz einer Fourierreihe*) (10)
Für welche $x \in \mathbb{R}$ existiert

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N} k^{-1}e^{ikx} - \sum_{k=1}^{N} k^{-1}e^{-ikx}\right)?$$

Man berechne gegebenenfalls den Grenzwert (Man denke an Aufgabe 1 Blatt 3).

Aufgabe 2 (*Die Hilberttransformation auf $L^2_{2\pi}$*) (10)
Es sei $H\colon L^2_{2\pi}(\mathbb{C}) \to L^2_{2\pi}(\mathbb{C})$ definiert über

$$\hat{H f}(k) = -i \operatorname{sgn} k \cdot \hat{f}(k)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Man zeige, dass dies einen wohldefinierten beschränkten linearen Operator definiert. Man berechne die Norm von H. Diesen Operator nennen wir die *Hilberttransformation (auf dem Torus)*.

Aufgabe 3 (*Nicht absolut konvergente Fourierreihe trotz stetiger Differenzierbarkeit*) (10)
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \ell^\infty(\mathbb{N}_{\geq 2})$ definiert über

$$f(x) = \left(\frac{1}{k\log k}e^{ikx}\right)_{k\in\mathbb{N}_{\geq 2}}.$$

Man zeige, dass $f \in C^1_{2\pi}(\ell^\infty(\mathbb{N}_{\geq 2}))$ gilt, aber die Fourierreihe $S_n f$ für keinen Punkt $x \in \mathbb{R}$ *absolut* konvergiert. Konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig? Wenn ja, was ist der Grenzwert? Kann man ein solches Beispiel auch für $\mathbb{K}$ statt $\ell^\infty(\mathbb{N}_{\geq 2})$ finden?

Aufgabe 4 (*Der Kern der Hilberttransformation*) (10)
Es sei $H\colon L^2_{2\pi}(\mathbb{C}) \to L^2_{2\pi}(\mathbb{C})$ wie in Aufgabe 2 die Hilberttransformation auf dem Torus. Man finde eine Funktion $K\colon (-\pi,\pi)\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ und einen dichten Unterraum $D \subset L^2_{2\pi}(\mathbb{C})$ so, dass für $f \in D$ und fast alle $x \in (-\pi,\pi)$

$$(Hf)(x) = ((\text{p.v. } K) * f)(x) := \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_\epsilon^\pi K(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y + \int_{-\pi}^{-\epsilon} K(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y\right)$$

gilt. Gibt es eine beschränkte Fortsetzung $\tilde{H}\colon L^1_{2\pi}(\mathbb{C}) \to L^1_{2\pi}(\mathbb{C})$ von H?

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe 5 (*Ein Fourierreihenkonvergenzsatz für Funktionen mit Sprungstellen*) (10*)
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to X$ eine 2π-periodische Funktion. Weiter gebe es $-\pi = a_1 < ... < a_n = \pi$ derart, dass $f|_{(a_k,a_{k+1})}$ zu einer stetig differenzierbaren Funktion $[a_k, a_{k+1}] \to X$ fortgesetzt werden kann. Man zeige, indem man Aufgabe 1 und ein Resultat aus der Vorlesung benutzt, dass

$$\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Zusatzaufgabe 6 (*Shiftinvariante beschränkte Operatoren*) (10*)
Es sei $T\colon L^p_{2\pi}(X) \to L^q_{2\pi}(Y)$ ein beschränkter linearer Operator derart, dass $\tau_t T = T\tau_t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt (Dabei sei τ_t der Shift einer Funktion um t). Man zeige, dass es eine beschränkte Funktion $m\colon \mathbb{Z} \to \mathcal{L}(X, Y)$ gibt mit

$$\hat{Tf}(k) = m(k)\hat{f}(k)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $f \in L^p_{2\pi}(X)$.

Zusatzaufgabe 7 (*Poissonsche Summenformel*) (10*)
Es sei $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gegeben. Man zeige, dass beide Seiten Sinn machen und, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)(n)$$

gilt. Dabei setzen wir

$$(\mathcal{F}f)(k) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ikx} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dazu untersuche man $g(2\pi x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n + x)$ mit der Fouriertransformation.

Zusatzaufgabe 8 (*Nullfolge, die nicht Fourierreihe einer integrierbaren Funktion ist*) (10*)
Man zeige, dass für eine ungerade periodische Funktion f aus $L^1_{2\pi}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-1}\hat{f}(k)$$

beschränkt ist unabhängig von $n \in \mathbb{N}$. Man finde zudem ein explizites $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$, welches nicht die Fourierreihe einer Funktion aus $L^1_{2\pi}$ ist.