ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2016/2017

Übungsblatt 6

Harmonische Analysis

Übungsaufgaben sind abzugeben am Freitag **2.12.2016** um spätestens **10ct**.

Aufgabe 1 (*Konvergenz fast überall und in L^p*) (10)
An einigen Stellen, zum Beispiel bei der Konvergenz der Fourierreihe, haben wir Konvergenzen in L^p festgestellt. Ein offenes Problem war stets, ob die Konvergenz auch punktweise fast überall richtig ist. In dieser Aufgabe wollen wir nochmal die Bezeihung zwischen den beiden Konvergenzarten wiederholen.
Finden Sie eine Folge $f_n \in L^p([0,1])$, die gegen $f \in L^p([0,1])$ in $L^p([0,1])$ für alle $p \in [1,\infty)$ aber nicht fast überall konvergiert. Zeigen Sie weiter, dass es aber für jede Folge $f_n \in L^p([0,1])$ (für $p \in [1,\infty)$ fest), die gegen $f \in L^p([0,1])$ in $L^p([0,1])$ konvergiert eine **Teilfolge** existiert, die fast überall gegen f konvergiert.

Aufgabe 2 (*Fouriertransformation für hilbertraumwertige L^2-Funktionen*) (10)
Es seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, H)$ für einen Hilbetrtaum H. Man zeige

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{F}f|g)_H = \int_{\mathbb{R}^d} (f|\overline{\mathcal{F}}g)_H,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{F}f|\mathcal{F}g)_H = \int_{\mathbb{R}^d} (f|g)_H$$

und, dass sich die Fouriertransformation zu einem unitären Operator auf $L^2(\mathbb{R}^d, H)$ fortsetzt.

Aufgabe 3 (*Stark wachsende Funktionen als temperierte Distributionen*) (10)
Man zeige, dass es keine temperierte Distribution u gibt mit

$$\langle u, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^t \phi(t) \,\mathrm{d}t$$

für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ aber eine temperierte Distribution v mit mit

$$\langle v, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^t \sin(e^t) \phi(t) \,\mathrm{d}t$$

für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ existiert.

Aufgabe 4 (*Cauchy-Hauptwerte als temperierte Distributionen*) (10)
Es sei $K \colon \mathbb{R}^d \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, die $|K(x)| \leq c|x|^{-d}$ für ein $c > 0$ erfüllt. Weiter existiere

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{1 > |x| > \epsilon} K(x) \,\mathrm{d}x.$$

Man zeige, dass

$$\langle \text{p.v. } K, \phi \rangle := \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{|x| > \epsilon} K(x) \phi(x) \,\mathrm{d}x$$

für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine temperierte Distribution p.v. K definiert.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe 5 (*Approximationen der Delta-Distribution*) (10*)
Stattet man $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d, X)$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz aus, so konvergiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von temperierten Distributionen genau dann gegen u, wenn

$$\langle u, \phi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, \phi\rangle$$

für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt. Man zeige, dass die zu

$$f_n(x) = n \exp(-\pi n^2 x^2),$$

und

$$g_n(x) = \frac{1}{\pi x} \sin(nx)$$

gehörigen temperierten Distributionen $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ gegen δ_0 konvergieren für $n \to \infty$.

Zusatzaufgabe 6 (*Approximationen von temperierten Distributionen*) (10*)
Es sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d, X)$ eine temperierte Distribution und $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ eine Schwarzfunktion. Man zeige, dass

$$u * \phi \colon \mathbb{R}^d \ni t \mapsto \langle u, \phi(t - \cdot)\rangle \in X$$

eine glatte Funktion definiert.
Man zeige nun noch, dass es für jedes $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d, X)$ eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d, X)$ gibt, die gegen u konvergiert (siehe Zusatzaufgabe 5 für die Konvergenz von temperierten Distributionen).

Zusatzaufgabe 7 (*Die Fouriertransformation verhält sich schlecht auf L^p für $p > 2$*) (10*)
Es sei $p > 2$. Man zeige, dass kein $C > 0$ gibt derart, dass

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^1(B(0,1))} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt. Insbesondere ist die Fouriertransformation auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ nicht beschränkt nach $L^q(\mathbb{R}^d)$ für irgendein $q \in [1, \infty]$.

Zusatzaufgabe 8 (*Wann sind stetige Funktionen temperierte Distributionen?*) (10*)
Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man zeige, dass es genau dann eine temperierte Distribution u mit

$$\langle u, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gibt, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $F \in C^n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ gibt mit $F^{(n)} = f$.