Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2016/2017

Übungsblatt 7

Harmonische Analysis

Übungsaufgaben sind abzugeben am Freitag **9.12.2016** um spätestens **10ct**.

Aufgabe 1 (*Distributionelle Ableitung ist der Limes des Differenzenquotienten*) (10)

(a) Es sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d, X)$ gegeben. Wir definieren $\tau_h u$ über

$$\langle \tau_h u, \phi \rangle = \langle u, \phi(\cdot - h) \rangle.$$

Man zeige, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tau_{he_k} u - u}{h} = \partial_k u$$

in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d, X)$ gilt.

(b) Man zeige weiter, dass $u * \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, X) \cap \mathrm{Pol}(\mathbb{R}^d, X)$ ist und

$$\partial_k(u * \phi) = u * (\partial_k \phi) = (\partial_k u) * \phi$$

für alle $k = 1, ..., d$ und $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt.

Aufgabe 2 (*Ableitungen und Fouriertransformation berechnen*) (10)

Man zeige (Ableitung, Laplaceoperator und Fouriertransformation seien im Sinne der temperierten Distributionen $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ zu verstehen):

(a) $(-i \operatorname{sgn} x)' = -2i\delta_0$

(b) $\mathcal{F}(-i \operatorname{sgn} x) = -\mathrm{p.v.}\ \frac{1}{\pi x}$

Aufgabe 3 (*Elliptische Differenzialgleichungen lösen an einem Beispiel*) (10)

Man finde alle $\lambda \in \mathbb{C}$ derart, dass für alle $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d, X)$ genau ein $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d, X)$ existiert mit

$$\lambda u - \Delta u = v.$$

Man zeige zudem, dass für eben solche λ und jedes $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ die Lösungen u der obigen Gleichung auch in $L^2(\mathbb{R}^d)$ liegt und

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_\lambda \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

gilt, wobei C_λ nur von λ aber nicht von u und v abhängig ist.

Aufgabe 4 (*Sobolev-Räume auf* $\mathbb{R}^d$) (10)

Für $p \in [1, \infty)$ definieren wir ($|\cdot|_1$ bezeichne die 1-Norm auf $\mathbb{R}^d$ und ∂^α die distributionelle Ableitung)

$$W^{n,p}(\mathbb{R}^d, X) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : \ \partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^d, X) \text{ für all } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |\alpha|_1 \leq n \right\}$$

Man zeige, dass dies zusammen mit der Norm

$$\|f\|_{W^{n,p}(\mathbb{R}^d,X)} := \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d,\ |\alpha|_1 \leq n} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^d,X)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

einen Banachraum definiert.

Bitte wenden!

Aufgabe 5 (*Äquivalente Beschreibung eines Sobolevraumes*) (10*)
Man zeige, dass

$$W^{2n,2}(\mathbb{R}^d, X) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) :\ (1-\Delta)^n f \in L^2(\mathbb{R}^d, X) \right\}$$

gilt und die Norm auf $W^{2n,2}(\mathbb{R}^d, X)$ äquivalent ist zur Norm

$$f \mapsto \|(1-\Delta)^n f\|_{L^2(\mathbb{R}^d, X)}\,.$$

Dabei ist $(1-\Delta)^n$ distributionell zu verstehen, d.h. $\langle (1-\Delta)^n f, \phi\rangle = \langle f, (1-\Delta)^n \phi\rangle$ für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Zusatzaufgabe 6 (*Fouriertransformation und Fourierreihe*) (10*)
Es sei $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ gegeben. Man zeige, dass es eine eindeutige temperierte Distributionen u gibt mit

$$\langle u, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(2\pi x)\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Man zeige weiter, dass

$$\mathcal{F}u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\delta_n$$

gilt.

Zusatzaufgabe 7 (*Der Dirac-Kamm*) (10*)
Man zeige, dass

$$\langle Ш, \phi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \phi(n)$$

für $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ eine temperierte Distribution Ш definiert und die einzige temperierte Distribution mit den folgenden Eigenschaften ist:

(a) Ш ist 1-periodisch in jede Koordinatenrichtung, d.h. für alle $k = 1, ..., d$ gilt

$$\langle Ш, \phi(\cdot - e_k)\rangle = \langle Ш, \phi\rangle.$$

(b) Ш multipliziert mit $e^{2\pi i x_k}$ ergibt Ш ($k = 1, ..., d$), d.h. es gilt

$$\langle Ш, e^{2\pi i (\cdot)_k}\phi(\cdot)\rangle = \langle Ш, \phi\rangle.$$

(c) Ш ist die Delta-Distribution nahe 0, d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \langle Ш, \phi(n\cdot)\rangle = \phi(0).$$

Zusatzaufgabe 8 (*Der Dirac-Kamm und die Poissonsche Summenformel*) (10*)
Es sei Ш die temperierte Distribution aus Zusatzaufgabe 7. Man zeige, dass Ш die Eigenschaften hat, dass für alle $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{n\to\infty} \langle Ш, n^{-d}\phi(n^{-1}\cdot)\rangle = \int \phi(x)\,\mathrm{d}x$$

gilt. Man folgere daraus und aus Zusatzaufgabe 7, dass $\mathcal{F}Ш = Ш$ und damit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}f)(n)$$

für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt.