ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2016/2017

Übungsblatt 8

Harmonische Analysis

Übungsaufgaben sind abzugeben am Freitag **16.12.2016** um spätestens **10ct**.

Aufgabe 1 (*Einfache Manipulationen von Fouriermultiplikatoren*) (10)
Es seien $m, m_1, m_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ Fouriermultiplikatoren auf $L^p(\mathbb{R}^d)$. Man zeige, dass auch $\alpha m_1 + \beta m_2, m_1 m_2$, $m \exp(2\pi i\langle x, \cdot\rangle)$, $m(\cdot + x)$ und $m(r\cdot)$ Fouriermultiplikatoren auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ sind für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Aufgabe 2 (*Faltungsoperatoren und translationsinvariante Operatoren*) (10)
Es sei $p, q \in [1, \infty]$. Man zeige, dass es eine eindeutige lineare Abbildungen

$$K\colon \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

$$M\colon \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

gibt derart, dass $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\phi \cdot M(T)) = \phi * K(T) = T\phi$ für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und alle $T \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ gilt. Man zeige weiter, dass diese Abbildung injektiv ist, falls $p < \infty$ gilt.

Aufgabe 3 (*Dualitätsargument für Fouriermultiplikatoren*) (10)
Es sei $p, q \in [1, \infty]$. Es sei $m \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ derart, dass

$$\left\|\phi * \overline{\mathcal{F}}(m)\right\|_q \leq C \left\|\phi\right\|_p$$

für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt (d.h. m ist ein L^p-L^q-Fouriermultiplikator). Man zeige, dass auch

$$\left\|\phi * \overline{\mathcal{F}}(m)\right\|_{p'} \leq C \left\|\phi\right\|_{q'}$$

gilt, wobei $p^{-1} + p'^{-1} = 1$ und $q^{-1} + q'^{-1} = 1$ sei.

Aufgabe 4 (*Elliptische maximale Regularität an einem einfachen Beispiel*) (10)
Man zeige, dass es für $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ genau ein $f \in W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ gibt mit

$$f - \Delta f = g.$$

Man zeige weiter, dass es eine Konstante $C > 0$ unabhängig von g und f gibt, derart, dass

$$\|f\|_{W^{2,2}(\mathbb{R}^d)} \leq C\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

gilt.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe 5 (*Ein translationsinvarianter Nicht-Faltungsoperator auf L^∞*) (10*)
Der Satz von Hahn-Banach impliziert, dass es ein $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)'$ gibt mit

$$f(g) = \lim_{r\to\infty} r^{-d} \int_{|x|<r} g(x)\,\mathrm{d}x$$

für $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, falls der Limes exisitiert. Man zeige dies und, dass

$$T\colon L^\infty(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d),\, Tg = f(g)\mathbb{1}$$

ein translationsinvarianter Operator ist. Man folgere daraus, dass K und M aus Aufgabe 1 im Fall $p = q = \infty$ nicht injektiv sind.

Zusatzaufgabe 6 (*Anwendung einer gegebenen elliptischen maximalen Regularität*) (10*)
Sie dürfen annehmen, dass für $p \in (1, \infty)$ die Gleichung

$$f - \Delta f = g$$

für alle $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ genau eine Lösung $f \in W^{2,p}(\mathbb{R}^d)$ hat und es eine Konstante C_p unabhängig von f und g gibt mit

$$\|f\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^d)} \le C_p \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Es sei $p > d$ fixiert. Man zeige mit einem Banachschen Fixpunktsatz und der Sobolev-Ungleichung

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le C_p' \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)},$$

dass für alle $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ die Gleichung

$$f - \Delta f = g + \partial_1^2 f \cdot \partial_1 f$$

eine Lösung $f \in W^{2,p}(\mathbb{R}^d)$ hat, falls $\|g\|_p$ (abhängig nur von C_p' und C_p) klein genug ist.

Zusatzaufgabe 7 (*Punktweiser Grenzwert von Fouriermultiplikatoren*) (10*)
Es sei $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten messbaren Funktionen $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $p, q \in [1, \infty)$. Weiter seien m_n Fouriermultiplikatoren von $L^p(\mathbb{R}^n)$ nach $L^q(\mathbb{R}^n)$ und

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_{m_n}\|_{\mathcal{L}(L^p,L^q)} \le C < \infty.$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|m_n\|_\infty < \infty.$$

Weiter existiere

$$m = \lim_{n\to\infty} m_n$$

punktweise fast überall. Man zeige, dass auch m ein solcher Fouriermultiplikator ist und $\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^p,L^q)} \le C$ gilt.

Zusatzaufgabe 8 (*Das Multiplikatorproblem für den Ball - ein einfacher Fall*) (10*)
Es sei $m = \mathbb{1}_{B(0,1)} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Man berechne

$$\overline{\mathcal{F}}m.$$

Es sei $p \le 3/2$ bzw. $p \ge 3$. Man folgere, dass m kein $L^p(\mathbb{R}^3)$-Fouriermultiplikator ist. Ähnliches kann man auf für Dimensionen $d \ge 2$ zeigen (ist aber hier nicht verlangt).
Bemerkung: Charles Fefferman konnte dies überaschenderweise auch für $p \in [1, \infty]\backslash\{2\}$ in Dimension $d > 1$ zeigen (Dies hängt sehr eng zusammen mit der Bemerkung zu Aufgabe 4 auf Blatt 5). Für p nahe an 2 ist der Beweis deutlich trickreicher und schwerer.