Übungen zu Analysis 3
Wintersemester 2007/08.

Inhaltsverzeichnis

Dr. Gerhard Baur
Dr. Markus Biegert
WS 07/08

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Analysis III

Blatt : 1

Abgabetermin : Donnerstag, 25.10.2007

1. *Entscheide*, ob es sich bei folgenden Mengensystemen um Algebren bzw. σ-Algebren (über Ω) handelt. [6]

(a) $\Omega := [0,\infty) \subset \mathbb{R}$ und $\mathscr{A}_1 := \{[0,a) : a \in [0,\infty)\}$.
Hierbei ist $[a,b)$ für $a \le b$ gegeben durch $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$.

(b) $\Omega := \mathbb{N}$ und $\mathscr{A}_2 := \{M \subset \mathbb{N} : M$ oder $\mathbb{N} \setminus M$ ist endlich$\}$.
Eine Menge heißt endlich, falls sie nur endlich viele Elemente besitzt.

(c) $\Omega := \mathbb{R}$ und $\mathscr{A}_3 := \{M \subset \mathbb{R} : M$ oder $\mathbb{R} \setminus M$ ist höchstens abzählbar$\}$.
Eine Menge M heißt höchstens abzählbar, falls es eine injektive Abbildung $M \to \mathbb{N}$ gibt.

2. *Zeige* anhand eines Beispiels, daß die Vereinigung zweier σ-Algebren keine Algebra sein muß. [2]

3. Seien $\mathscr{A}$ eine Algebra über Ω, $I = \mathbb{N}$ oder $I = \{1,2,\dots,N\}$ und $A_i \in \mathscr{A}$ für $i \in I$ gegeben.

(a) *Zeige*, daß es paarweise disjunkte Mengen $E_i \in \mathscr{A}$ gibt, so daß [2]

$$\bigcup_{i\in I} E_i = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Die Mengen E_i mit $i \in I$ heißen paarweise disjunkt, falls $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i,j \in I$, $i \neq j$.

(b) *Zeige*, daß es eine monoton wachsende Folge von Mengen $F_i \in \mathscr{A}$ gibt, so daß [2]

$$\bigcup_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Eine Folge von Mengen $(F_i)_{i\in I}$ heißt monoton wachsend, falls $F_i \subset F_j$ für $i,j \in I$, $i \le j$.

4. Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathscr{A} := \mathscr{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$. *Bestimme* drei verschiedene Erzeugendensysteme der σ-Algebra $\mathscr{A}$. [2]

5. Die Borelsche σ-Algebra B

(a) *Zeige*, daß jede offene und jede abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}$ zu B gehört. [3]

(b) *Zeige*, daß $\sigma(\{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}) = \mathsf{B}$. [3]

<u>Hinweis:</u>

Bei jeder Aufgabe mit dem Wort *Entscheide* bzw. *Bestimme* muss neben der 'Entscheidung' bzw. der 'Bestimmung' auch immer eine hinreichend ausführliche Begründung angegeben werden. Dies soll ab sofort für alle folgenden Aufgaben gelten.

Übungen zu Analysis III

Blatt : 2

Abgabetermin : Donnerstag, 08.11.2007

6. *Entscheide*, ob es sich bei folgenden Abbildungen um äußere Maße bzw. Maße handelt.

(a) $\mathscr{A} := \mathscr{P}(\mathbb{R})$ und $\mu : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ gegeben durch [2]

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{falls } E \text{ endlich ist;} \\ \infty, & \text{falls } E \text{ nicht endlich ist;} \end{cases}$$

(b) $\mathscr{A} := \{M \subset \mathbb{R} : M \text{ oder } \mathbb{R} \setminus M \text{ höchstens abzählbar}\}$ (vgl. Aufgabe 1) und $\mu : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ gegeben durch [2]

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{falls } E \text{ höchstens abzählbar ist;} \\ \infty, & \text{falls } E \text{ überabzählbar ist;} \end{cases}$$

7. (a) Sei $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen. *Zeige*, daß $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ gegeben durch [2]

$$\mu(E) := \sum_{n\in E} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \mathbb{1}_E(n) \tag{1}$$

ein Maß auf $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ ist. Hierbei ist die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_E$ der Menge E definiert durch $\mathbb{1}_E(n) = 1$ falls $n \in E$ und $\mathbb{1}_E(n) = 0$ sonst.

(b) *Zeige*, daß es zu jedem Maß μ auf $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ eine eindeutig bestimme Folge $(a_n)_n$ in $[0,\infty]$ gibt, so daß μ gegeben ist durch (1). [2]

(c) Für eine Menge $A \subset \mathbb{Z}$ und $t \in \mathbb{Z}$ setzen wir $t + A := \{t + n : n \in A\}$. Wir nennen ein Maß μ auf $(\mathbb{Z}, \mathscr{P}(\mathbb{Z}))$ translationsinvariant falls $\mu(t + A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathscr{P}(\mathbb{Z})$ und $t \in \mathbb{Z}$. *Zeige*: Für jedes translationsinvariante Maß μ auf $(\mathbb{Z}, \mathscr{P}(\mathbb{Z}))$ gibt es ein $c \in [0,\infty]$, so daß $\mu(A) = c|A|$ für alle $A \subset \mathbb{Z}$. Hier ist $|A| \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ die Anzahl der Elemente von A. [4]

8. Der 'Limes superior/Limes inferior' einer Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen ist definiert durch

$$\begin{aligned} \limsup_n A_n &:= \{x : x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}, \\ \liminf_n A_n &:= \{x : x \in A_n \text{ für alle bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

(a) *Zeige* folgende Identitäten [4]

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \qquad \text{und} \qquad \liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

(b) Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein meßbarer Raum und $(A_n)_n \subset \mathscr{A}$ eine Folge $\mathscr{A}$-meßbarer Mengen. *Zeige*, daß $\liminf_n A_n$ und $\limsup_n A_n$ auch $\mathscr{A}$-meßbar sind. [2]

(c) Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_n)_n \subset \mathscr{A}$ eine Folge $\mathscr{A}$-meßbarer Mengen. *Zeige* nun folgende Ungleichungen. [2]

$$\begin{aligned} \limsup_n \mu(A_n) &\leq \mu(\limsup_n A_n) \qquad \text{falls } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty \text{ und} \\ \liminf_n \mu(A_n) &\geq \mu(\liminf_n A_n). \end{aligned}$$

9. (Die α-Cantor-Menge)

Sei M die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$, welche sich als disjunkte Vereinigung nicht-entarteter kompakter Intervalle schreiben läßt. Dabei heißt ein Intervall nicht-entartet falls es mindestens zwei verschiedene Punkte enthält. Für $\alpha \in (0, 1/2)$ definieren wir den 'Wischoperator' $W_\alpha : M \to M$ durch

$$W_\alpha\left(\bigcup_{n\in I}[a_n, b_n]\right) := \bigcup_{n\in I}\left([a_n, a_n + \alpha(b_n - a_n)] \cup [b_n - \alpha(b_n - a_n), b_n]\right),$$

wobei die auftretenden Intervalle $[a_n, b_n]$ disjunkt seien.

(a) *Zeige*: Jedes $A \in M$ ist die <u>höchstens abzählbare</u> Vereinigung disjunkter nicht-entarteter kompakter Intervalle. [2]

(b) Wir setzen $C_{\alpha,0} := [0, 1] \in M$ und definieren rekursiv die Mengen $C_{\alpha,n} \in M$ durch [4]

$$C_{\alpha,n+1} := W_\alpha(C_{\alpha,n}) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die α-Cantor-Menge C_α definiert durch $C_\alpha := \bigcap_n C_{\alpha,n}$. *Zeige* folgende Aussagen.

- C_α ist Borel-meßbar.
- $\lambda(C_\alpha) = 0$.
- C_α ist überabzählbar.

Bem: Die $1/3$-Cantor-Menge wird in der Literatur auch als Cantor-Menge bezeichnet.

(c) *Skizziere* die Mengen $C_{1/3,j}$ für $j \in \{0, 1, 2\}$. [2]

Dr. Gerhard Baur
Dr. Markus Biegert
WS 07/08

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Analysis III

Blatt : 3

Abgabetermin : Donnerstag, 15.11.2007

10. *Entscheide* ob die unten angegebenen Relationen reflexiv, symmetrisch oder transitiv sind und *gib* zudem an, ob es sich jeweils um eine Äquivalenzrelation oder eine Funktion handelt. [3]

1. Die Relation R_1 in $\mathbb{R}$ gegeben durch $\mathsf{R}_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \leq y\}$.
2. Die Relation R_2 in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $\mathsf{R}_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = y_1 + y_2\right\}$.
3. Die Relation R_3 in $[0,\infty)$ gegeben durch $\mathsf{R}_3 := \left\{(x,y) \in [0,\infty)^2 : x^2 = y\right\}$.

11. *Vervollständige* den Beweis von Satz 5 indem Du die fehlenden Details überprüfst. [2]

12. Sei $\mu^\star : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ gegeben durch

$$\mu^\star(E) := \begin{cases} 0, & \text{falls } E \text{ höchstens abzählbar ist;} \\ 1, & \text{falls } E \text{ überabzählbar ist;} \end{cases}$$

(a) *Zeige*, daß $\mu^\star$ ein äußeres Maß ist. [2]

(b) *Bestimme* das Mengensystem $\mathscr{A}_{\mu^\star}$ der $\mu^\star$-meßbaren Mengen. [2]

(c) *Zeige* mit Hilfe der Definition, daß die Einschränkung von $\mu^\star$ auf $\mathscr{A}_{\mu^\star}$ tatsächlich (wie aus dem Satz von Caratheodory folgt) ein Maß ist. [2]

13. *Zeige*, daß für das Lebesgue-Stieltjes äußere Maß $\lambda_g^\star$ mit einer monoton wachsenden und stetigen Belegungsfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: [2]

$$\lambda_g^\star((a,b)) = g(b) - g(a) \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}, a < b.$$

14. *Beweise* Satz 7 (i) der Vorlesung: Für eine Lebesgue-meßbare Teilmenge E des $\mathbb{R}^n$ gilt: [2]

$$\lambda(E) = \inf\{\lambda(O) : O \subset \mathbb{R}^n \text{ offen und } E \subset O\}.$$

15. Zeige, daß jede Gerade G im $\mathbb{R}^2$ eine $\lambda_2^\star$-Nullmenge ist. [2]

16. *Zeige*, daß jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-meßbar ist. [3]

 Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:

http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/ana3

Relationen, Funktionen und Klasseneinteilung

Definition 1 *Seien zwei Mengen A und B gegeben. Dann heißt jede Menge $\mathsf{R} \subset A \times B$ eine* **Relation** *zwischen A und B. Ist $(a,b) \in \mathsf{R}$, so sagt man "a steht in Relation zu b" und schreibt dafür auch $a\mathsf{R}b$. Eine Relation $\mathsf{R} \subset A \times A$ nennt man auch eine Relation in A.*

Definition 2 *Sei A eine Menge und R eine Relation in A. Dann heißt die Relation R*

- **reflexiv** *falls gilt: $a\mathsf{R}a$ für alle $a \in A$.*
- **symmetrisch** *falls gilt: Für alle $a,b \in A$ folgt aus $a\mathsf{R}b$ stets $b\mathsf{R}a$.*
- **transitiv** *falls gilt: Für alle $a,b,c \in A$ mit $a\mathsf{R}b$ und $b\mathsf{R}c$ folgt stets $a\mathsf{R}c$.*

Eine Relation R in A heißt **Äquivalenzrelation**, *falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.*

Definition 3 *Seien Mengen A und B gegeben. Dann heißt eine Relation F zwischen A und B* **Funktion** *oder Abbildung, falls folgende zwei Eigenschaften erfüllt sind.*

- *Für alle $x \in A$ gibt es ein y in B mit $x\mathsf{F}y$.* *(linkstotal)*
- *Für alle $x \in A$ und $y,z \in B$ folgt aus $x\mathsf{F}y$ und $x\mathsf{F}z$ stets $y = z$.* *(rechtseindeutig)*

Anstatt $x\mathsf{F}y$ schreiben wir in diesem Fall auch $F(x) = y$.

Definition 4 *Sei A eine nicht-leere Menge. Eine* **Klasseneinteilung** *von A ist ein Mengensystem $\mathscr{Z} \subset \mathscr{P}(A)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(K1) $\emptyset \notin \mathscr{Z}$.

(K2) $A = \bigcup \mathscr{Z} := \bigcup_{M \in \mathscr{Z}} M$.

(K3) Sind $M_1, M_2 \in \mathscr{Z}$ und $M_1 \neq M_2$, so ist $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

Die Elemente der Klasseneinteilung heißen **Äquivalenzklassen**.

Satz 5 *Sei A eine nicht-leere Menge. Jede Äquivalenzrelation R in A definiert eine Klasseneinteilung $\mathscr{Z}$ von A, und umgekehrt, jede Klasseneinteilung $\mathscr{Z}$ von A bestimmt eine Äquivalenzrelation R in A.*

Beweis. Sei R eine Äquivalenzrelation in A. Dann definiert

$$\mathscr{Z} := \{\{x \in A : a\mathsf{R}x\} : a \in A\}$$

eine Klasseneinteilung von A.

Sei $\mathscr{Z}$ eine Klasseneinteilung von A. Dann definiert

$$\mathsf{R} := \{(x,y) \in A \times A : \exists M \in \mathscr{Z} \text{ mit } x,y \in M\}$$

eine Äquivalenzrelation in A. ■

Übungen zu Analysis III

Blatt : 4

Abgabetermin : Donnerstag, 22.11.2007

17. **(Prinzip der guten Mengen)** Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein meßbarer Raum. Wir zeigen daß eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann $\mathscr{A}$-meßbar ist, wenn das Urbild jeder Borelmenge eine $\mathscr{A}$-meßbare Menge ist, d.h. f ist genau dann $\mathscr{A}$-meßbar falls $f^{-1}(A) = \{x \in \Omega : f(x) \in A\} \in \mathscr{A}$ für alle $A \in \mathsf{B}$.

(a) *Zeige*, daß $\mathscr{C} := \left\{A \in \mathsf{B} : f^{-1}(A) \in \mathscr{A}\right\}$ eine σ-Algebra ist. [2]

(b) *Zeige*: f ist $\mathscr{A}$-meßbar genau dann wenn $\mathscr{C} = \mathsf{B}$. [2]

18. **(Verknüpfung meßbarer Funktionen)** Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein meßbarer Raum, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathscr{A}$-meßbar Funktion und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-meßbar. *Zeige*, daß $\varphi \circ f$ wieder $\mathscr{A}$-meßbar ist. [2]

19. **(Bildmaß)** Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathscr{A}$-meßbare Funktion. *Zeige*, daß $\nu : \mathsf{B} \to [0, \infty]$ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathsf{B})$ definiert, wobei ν gegeben ist durch $\nu(A) := \mu(f^{-1}(A))$. [2]

20. **(Approximation durch Treppenfunktionen)** Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein meßbarer Raum und $f \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{A})$ eine $\mathscr{A}$-meßbare Funktion. *Zeige*, daß es eine Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_n)_n \subset \mathscr{T}(\Omega, \mathscr{A})$ gibt, so daß gilt: [2]

- $|\varphi_n| \le |\varphi_{n+1}| \le |f|$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
- $\varphi_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$ für alle $x \in \Omega$.

21. Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{N}$ eine $\mathscr{A}$-meßbare Funktion. *Zeige*, daß [2]

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in \Omega : f(x) \ge n\}).$$

22. Sei μ das Maß auf $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ aus Aufgabe (7) assoziiert zu einer Folge $(a_n)_n \subset [0, \infty)$.

(a) *Zeige*, daß für alle Folgen $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(n) = \int f \, d\mu$. [2]

(b) Gegeben sei eine Doppelfolge $(f_{m,n})_{m,n} \in [0, \infty)$ und definiere $b_n := \liminf_m f_{m,n}$. *Zeige* folgende Ungleichung (mit Hilfe von Fatou): [2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \le \liminf_m \sum_{n=1}^{\infty} f_{m,n}$$

23. Sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Dann betrachten wir die Folgen $f_n := n^{-1} \mathbb{1}_{[0,n]}$ und $g_n := \mathbb{1}_{[n,\infty)}$ und setzen $h(x) := 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) *Zeige*, daß $f_n \to h$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ und $\int f_n \, d\lambda \not\to \int h \, d\lambda$. [2]

(b) *Zeige*: g_n konvergiert monoton fallend und punktweise gegen h aber $\int g_n \, d\lambda \not\to \int h \, d\lambda$. [2]

Übungen zu Analysis III

Blatt : 5

Abgabetermin : Donnerstag, 29.11.2007

24. Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. *Zeige*, daß die Menge [2]

$$M := \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$$

die abzählbare Vereinigung meßbarer Mengen mit endlichem Maß ist.

25. Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. *Zeige* die folgende Äquivalenz. [2]

$$\int_E f\,d\mu \geq 0 \text{ für alle } E \in \mathscr{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) \geq 0 \text{ für fast alle } x \in \Omega.$$

26. Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $f_n, f \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. *Zeige* die folgende Implikation. [2]

$$\int |f_n - f|\,d\mu \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu.$$

27. Sei λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch [4]

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \cos(nx).$$

Zeige, daß $f \cdot \mathbb{1}_{[0,\pi]}$ auf $(\mathbb{R}, \mathsf{B}, \lambda)$ integrierbar ist und *berechne* das Integral $\int_{[0,\pi]} f\,d\lambda$.

28. Für eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ setzen wir (beachte $\inf(\emptyset) := \infty$) [5]

$$[f]_\infty := \inf\{c \in \mathbb{R}_+ : |f| \leq c \text{ f.ü.}\}.$$

Sei nun $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum sowie μ ein endliches Maß. Wir betrachten nun Funktionen $f_n \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ und eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ so daß gilt:

$$[f_n - f]_\infty \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Zeige, daß $f \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ist und daß $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$.

29. **(Verallgemeinerung des Satzes über die dominierte Konvergenz von Lebesgue)** [5]
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und seien Funktionen $f_n, g_n \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ gegeben mit den Eigenschaften:

- $|f_n| \leq g_n$ f.ü.
- $f_n \to f$ und $g_n \to g$ f.ü.
- $\lim_n \int g_n\,d\mu = \int g\,d\mu < \infty$.

Zeige, daß $f \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ und $\lim_n \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$.

Übungen zu Analysis III

Blatt : 6

Abgabetermin : Donnerstag, 06.12.2007

30. Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $B \in \mathscr{A}$. Dann setzen wir $\mathscr{A}' := \{A \cap B : A \in \mathscr{A}\}$. Sei nun $\mu' : \mathscr{A}' \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\mu'(C) := \mu(C)$. *Zeige*, daß $(B, \mathscr{A}', \mu')$ ein Maßraum ist. [1]

31. Sei μ ein signiertes Maß auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathscr{A})$, d.h.

(SM1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(SM2) $\mu : \mathscr{A} \to [-\infty, \infty)$ oder $\mu : \mathscr{A} \to (-\infty, +\infty]$;

(SM3) μ ist σ-additiv.

(a) *Zeige:* Sind $P_1, P_2 \in \mathscr{A}$ positiv, so ist auch $P := P_1 \cup P_2$ positiv. [2]

(b) Seien $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge disjunkter $\mathscr{A}$-messbarer Mengen so daß $\mu(E) \in \mathbb{R}$, wobei $E := \bigcup_k E_k$. *Zeige*, daß die Reihe $\sum_k \mu(E_k)$ absolut konvergiert. [2]

(c) Seien (P_1, N_1) und (P_2, N_2) Hahn-Zerlegungen von $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. *Zeige*: Für alle $E \in \mathscr{A}$ gilt: [2]

$$\mu(P_1 \cap E) = \mu(P_2 \cap E).$$

32. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende und Lipschitz-stetige Funktion. Wir betrachten das Lebesgue-Stieltjes-Maß λ_g und das Lebesgue-Maß λ auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathrm{B})$. *Zeige*: [3]

$$\lambda_g \ll \lambda.$$

33. Seien λ, σ und ν σ-endliche Maße auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathscr{A})$.

(a) *Zeige:* Ist $\lambda \ll \mu$ und $\mu \ll \nu$ so ist $\lambda \ll \nu$ und es gilt [2]

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = \frac{d\lambda}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\nu} \qquad \nu\text{-fast-überall}.$$

(b) *Zeige:* Sind $\lambda, \mu \ll \nu$ so gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$: [2]

$$\frac{d}{d\nu}(\alpha\lambda + \beta\mu) = \alpha\frac{d\lambda}{d\nu} + \beta\frac{d\mu}{d\nu} \qquad \nu\text{-fast-überall}.$$

(c) *Zeige:* Ist $\lambda \ll \mu$ und $\mu \ll \lambda$ so gilt [2]

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)^{-1} \qquad \mu\text{-fast-überall}.$$

34. Sei B die Borelsche $\sigma-$Algebra auf $\mathbb{R}$, μ das Maß auf $(\mathbb{R}, \mathrm{B})$ gegeben durch $\mu(A) := \sharp A =$Anzahl der Elemente von A ($= \infty$ falls A ∞-viele Elemente hat) und λ das Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}, \mathrm{B})$.

(a) *Zeige*, daß λ ein σ-endliches Maß ist und daß $\lambda \ll \mu$. [2]

(b) *Zeige*, daß die Aussage des Satzes von Radon-Nikodym nicht gilt und *begründe* warum. [2]

Dr. Gerhard Baur
Dr. Markus Biegert
WS 07/08

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Analysis III

Blatt : 7

Abgabetermin : Donnerstag, 13.12.2007

35. Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathrm{B}, \lambda)$ wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. Auf diesem Maßraum betrachten wir Funktionen $f_n := n\mathbb{1}_{A_n}$ mit $A_n := [n^{-1}, 2n^{-1}]$. *Zeige* folgende Aussagen.

(a) $(f_n)_n$ konvergiert punktweise auf $\mathbb{R}$. [1]

(b) $(f_n)_n$ ist maßkonvergent. [1]

(c) $(f_n)_n$ konvergiert nicht im p-ten Mittel für jedes $p \in [1, \infty)$. [2]

36. (Verallgemeinerte Höldersche Ungleichung)
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Seien $1 \le r \le p < \infty$. *Zeige*: Ist $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, dann ist $u := |f|^r$ in $\mathscr{L}^{p/r}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. [2]

(b) Seien $1 < p, q < \infty$ und $r \in [1, \infty)$ mit $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$. *Zeige*, daß für $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ und $g \in \mathscr{L}^q(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ gilt: [3]

$$f \cdot g \in \mathscr{L}^r(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \qquad \text{und} \qquad \|fg\|_r \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q .$$

Hinweis: Wende die Höldersche Ungleichung auf $u := |f|^r$ und $v := |g|^r$ an.

37. Sei $1 < p < \infty$ und $q = p'$ der zu p konjugierte Index (d.h. $q^{-1} + p^{-1} = 1$). Wir betrachten einen Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ und Funktionen $f, f_n \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. *Zeige*: Konvergiert f_n gegen f in $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}\mu)$ (d.h. im p-ten Mittel) und ist $g \in \mathscr{L}^q(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, so konvergiert $f_n g$ gegen fg in $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. [2]

38. ($\mathscr{L}^p$-Inklusionen)

(a) Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und seien $1 \le p \le q \le \infty$. *Zeige*, daß $\mathscr{L}^q(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \subset \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. Hinweis: Hier ist $p \le q$. [2]

(b) Sei $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathscr{A} := \mathscr{P}(\mathbb{N})$ und μ das Zählmaß auf $(\Omega, \mathscr{A})$. *Zeige*, daß für $1 \le q \le p \le \infty$ gilt: $\ell^q := \mathscr{L}^q(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \subset \ell^p := \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ und $\|f\|_p \le \|f\|_q$. Hinweis: Hier ist $q \le p$. [2]

39. Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, und sei $f \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ eine reellwertige Funktion.

(a) *Zeige* folgende Äquivalenz: [2]

$$f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\mu\left(\{x \in \Omega : (n-1) \le |f(x)| < n\}\right) < \infty.$$

(b) *Zeige* folgende Äquivalenz: [1]

$$f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \quad \Longleftrightarrow \quad |f|^p \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu).$$

(c) Sei $p \in [1, \infty)$. *Zeige* folgende Äquivalenz: [2]

$$f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^p\mu\left(\{x \in \Omega : (n-1) \le |f(x)| < n\}\right) < \infty.$$

ulm university universität uulm

Dr. Gerhard Baur
Dr. Markus Biegert
WS 07/08

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Analysis III

Blatt : 8

Abgabetermin : Donnerstag, 20.12.2007

40. Sei Ω eine nicht-leere Menge und $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ eine Familie von Teilmengen von Ω. *Zeige*, daß $\mathscr{D}$ genau dann ein Dynkin-System auf Ω ist, wenn folgende $\mathscr{D}$ folgende Eigenschaften erfüllt: [4]

1. $\emptyset \in \mathscr{D}$;
2. $A \in \mathscr{D} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathscr{D}$;
3. Ist $(A_n)_n \subset \mathscr{D}$ und $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$, so ist $\bigcup_n A_n \in \mathscr{D}$.

41. *Zeige*, daß es genau ein Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathrm{B})$ gibt so daß $\mu((a,b)) = b - a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $b \geq a$. [3]
Hinweis: Die Existenz ist klar, denn das 1-dimensionale Lebesguemaß λ erfüllt dies.

42. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot \left[\mathbb{1}_{[x,x+1)}(y) - \mathbb{1}_{[x+1,x+2)}(y)\right]$$

sowie das 1-dimensionale Lebesguemaß λ auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathrm{B})$.

(a) *Skizziere* die Mengen $f^{-1}(\{1\})$ und $f^{-1}(\{-1\})$. [1]

(b) *Berechne* das Integral $\int \int f(x,y)\, d\lambda(y)\, d\lambda(x)$. [1]

(c) *Berechne* das Integral $\int \int f(x,y)\, d\lambda(x)\, d\lambda(y)$. [2]

(d) *Entscheide* (mit Begründung), ob der Satz von Fubini hier angewandt werden kann. [1]

43. Wir zeigen, daß $\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}/2$.

(a) *Zeige*, daß $I := \int_0^\infty \int_0^\infty y e^{-y^2(1+x^2)}\, dy\, dx = \pi/4$. [1]

(b) *Zeige*, daß $I = \left(\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt\right)^2$ und folgere die Behauptung [3]

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Hinweis: Benutze zuerst Tonelli und anschließend die Substitution $z = xy$.

44. Wir definieren den **Sinus cardinalis** wie folgt: [4]

$$\mathrm{sinc}(x) := \begin{cases} x^{-1}\sin(x) & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeige, daß $\int_0^\infty \mathrm{sinc}(x)\, dx = \pi/2$.
Hinweis: Benutze Fubini und die Identität $x^{-1} = \int_0^\infty e^{-xt}\, dt$.

Dr. Gerhard Baur
Dr. Markus Biegert
WS 07/08

Gesamt: 12 Punkte

Übungen zu Analysis III

Blatt : 9

Abgabetermin : Donnerstag, 10.01.2008

45. *Bestimme* die Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der folgenden Anfangswertaufgaben und *überprüfe* mit Maple ob die von Dir berechnete Lösung korrekt ist.

- $x' = -2$ und $x(3) = 1$. [2]
- $x' = -4x$ und $x(3) = 2$. [2]
- $x' = -10x + 5$ und $x(3) = 1$. [2]
- $x' = \ln(2)x^2 - \ln(2)x$ und $x(0) = 1/2$. [3]

Hinweis: ln ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

46. *Bestimme* die Lösung der folgenden Riccatischen DGL mit Anfangswert [3]

$$x' = x - x^2 + t^2 - t - 1 \qquad \text{mit} \qquad x(0) = 2.$$

Hinweis: Versuche zuerst eine Lösung der DGL der Form $x_0(t) = at + b$ zu bestimmen.

Hinweise:

1. So startet man Maple auf der theseus:

```
> ssh theseus
> xmaple &
```

2. So berechnet man mit Maple die Lösung des Anfangswertproblems

$$x' - 2x - 3 = 0 \qquad \text{und} \qquad x(1) = 4.$$

```
> restart;
> Dgl:=diff(x(t),t)-2*x(t)-3;
> AnfBed:=x(1)=4;
> dsolve({Dgl,AnfBed},x(t));
```

Dr. Gerhard Baur
Dr. Markus Biegert
WS 07/08

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Analysis III

Blatt : 10

Abgabetermin : Donnerstag, 17.01.2008

47. (Die exakte Differentialgleichung)
Prüfe welche der folgenden DGLn exakt sind und *bestimme* ggf. dazu eine Stammfunktion Φ.

(a) $2tx^2 + (2t^2 + 2)x' = 0$. [1]

(b) $10x^3 t + (15t^2 x^2)x' = 0$. [1]

(c) $\cos(t)\cos(x) - \sin(t)\sin(x)x' = 0$. [1]

48. (Nicht-Eindeutigkeit von Lösungen)
Finde zwei verschiedene Lösungen $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des folgenden AWP und *begründe* warum dies nicht dem Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf widerspricht: [2]

$$x' = (3x^2)^{1/3}, \quad x(5) = 3.$$

49. *Löse* folgende Anfangswertprobleme.

(a) $x' = -4t\sqrt{x}$, $x(0) = 1$. (Keine globale Eindeutigkeit) [2]

(b) $x' = \sqrt{2}e^x \cos(t)$, $x(0) = 0$. [2]

(c) $1 + x^2 - tx' = 0$, $x(1) = 1$. [2]

50. (Die homogene DGL) *Löse* die Differentialgleichung $x' = \frac{x}{t}(1 + \ln(x) - \ln(t))$, $t, x > 0$. [2]

51. (Eindeutigkeit von Lösungen)
Untersuche welche der folgenden AWPe $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ eine eindeutige Lösung besitzen.

(a)
- $f : [0,1) \times (-\pi, \pi)$ gegeben durch $f(t,x) := e^{t^2 x}\cos(tx)$; [1]
- $t_0 := x_0 := 0$.

(b)
- $f : [1,\infty) \times \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t,x) := \sqrt{1 + t + x^2}$; [1]
- $t_0 := x_0 := 1$.

(c)
- $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t,x) := t\sqrt{|x|}$; [1]
- $t_0 := x_0 := 0$.

52. (Nicht exakte DGLn exakt machen)
Ist eine DGL $f(t,x) + g(t,x)x' = 0$ nicht exakt, so kann man vielleicht durch Multiplikation mit einer Funktion $\mu = \mu(t,x) \neq 0$ erreichen, daß folgende Differentialgleichung exakt ist:

$$\mu(t,x)f(t,x) + \mu(t,x)g(t,x)x'(t) = 0. \tag{2}$$

Im Folgenden sei M eine sternförmige offene Menge im $\mathbb{R}^2$ und $f, g \in C^1(M)$.

(a) *Zeige:* Ist $g \neq 0$ und hängt $(f_x - g_t)/g$ nur von t ab, so gibt es einen Faktor $\mu = \mu(t)$ der nur von t abhängt, so daß die DGL (2) exakt ist. *Löse:* $(t+1)x^3 + 3tx^2 x' = 0$. [2]

(b) *Zeige:* Ist $tf - xg \neq 0$ und hängt $(g_t - f_x)/(tf - xg)$ nur von xt ab, so gibt es einen Faktor $\mu = \mu(xt)$ der nur von tx abhängt, so daß die DGL (2) exakt ist. *Löse:* $(t+x) - (t^2/x)x' = 0$. [2]

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/ana3

Übungen zu Analysis III

Blatt : 11

Abgabetermin : Mittwoch, 23.01.2008

53. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenen Intervall. Dann betrachten wir $m \times p$ und $p \times n$ Matrizen $A(t)$ und $B(t)$ gegeben durch

$$A(t) = (a_{i,j}(t)) \qquad \text{und} \qquad B(t) = (b_{j,k}(t))$$

wobei $a_{i,j}, b_{j,k} \in C^1(I)$ für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq p$, $1 \leq k \leq n$.

(a) *Zeige*, daß $t \mapsto A(t)B(t)$ differenzierbar ist mit [3]

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

(b) Zusätzlich gelte $m = p$ und $\det(A(t)) \neq 0$ auf I. *Zeige*, daß $A(t)^{-1}$ differenzierbar ist mit [3]

$$\frac{d}{dt}(A(t)^{-1}) = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t).$$

54. Löse das folgende System von Differentialgleichungen mit Hilfe der Picard-Iteration. [4]

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 + 2t - 1 \qquad x_1(0) = 1; \\ x_2' &= x_2 - x_1 + 2t + 1 \qquad x_2(0) = 0. \end{aligned}$$

<u>Hinweis:</u> Die Folge der Picard-Iterierten wurde in Satz 4 der Vorlesung definiert.

55. (Homogene lineare Systeme und Wronski-Determinante)
Wir betrachten die Abbildung $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$X(t) := e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & t \\ 1 & t & 1 + t^2/2 \\ -1 & 1-t & t - t^2/2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Zeige*, daß die Spalten von X Lösungen des folgenden homogenen linearen DGLS sind: [3]

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} x(t) = Ax(t). \tag{3}$$

(b) *Zeige*, daß X eine Fundamentalmatrix des homogenen linearen DGLS (3) ist, d.h. daß die Spalten von X ein Fundamentalsystem bilden. [2]

(c) *Berechne* die eindeutige Lösung des AWP [3]

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(1) = x_1 := (1,1,1)^T.$$

(d) *Berechne* $w(t) := \det X(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. [2]

Dr. Gerhard Baur
Dr. Markus Biegert
WS 07/08

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Analysis III

Blatt : 12

Abgabetermin : Donnerstag, 31.01.2008

56. *Bestimme* ein Fundamentalsystem für das DGL-System $x' = Ax$ für folgende Matrizen A:

(a) Hinweis: A hat drei verschiedene Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 in $\mathbb{C}$. [3]

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Hinweis: A hat zwei Eigenwerte λ_1 und λ_2 in $\mathbb{R}$ mit geometrischer Vielfachheit 2 und 1. [3]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Hinweis: A hat nur einen Eigenwert λ_1. Die geometrische Vielfachheit von λ_1 ist 1. [3]

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

57. *Bestimme* ein invertierbares $S \in \mathbb{R}^{4\times4}$, so daß $S^{-1}AS$ von Jordangestalt ist, für [3]

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

58. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$.

(a) *Zeige:* Gilt $AB = BA$, so ist $e^A e^B = e^{A+B}$. [2]

(b) *Zeige:* e^A ist invertierbar und $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$. [1]

59. Sei $E \in \mathbb{C}^{N\times N}$ die Einheitsmatrix.

(a) Sei $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ mit $A^2 = -E$. *Zeige:* [2]

$$e^{tA} = \cos(t)E + \sin(t)A \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Ist $N = 1$, $A = i$, so ist $e^{tA} = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) = \cos(t)I + \sin(t)A$.

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ mit $A^2 = E$. *Zeige:* [2]

$$e^{tA} = \cosh(t)E + \sinh(t)A.$$

Bemerkung: Ist $N = 1$, $A = 1$, so ist $e^{tA} = e^t = \cosh(t) + \sinh(t)$.

(c) Wir betrachten die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times2}$ gegeben durch [1]

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := e^A.$$

Berechne die Inverse von B.

Dr. Gerhard Baur
Dr. Markus Biegert
WS 07/08

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Analysis III

Blatt : 13

Abgabetermin : Donnerstag, 07.02.2008

60. (Gleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten)
Bestimme ein reelles Fundamentalsystem der folgenden Diffentialgleichungen:

(a) $x^{(3)} - 2x^{(2)} - x' + 2x = 0.$ [1]

(b) $x^{(3)} - 4x^{(2)} + 5x' - 2x = 0.$ [1]

(c) $x^{(3)} - 3x^{(2)} + x' - 3x = 0.$ [1]

61. *Berechne* die Lösung des folgenden Anfangswertproblems: [4]

$$x''(t) - 3x'(t) - 4x(t) = 4t, \qquad x(0) = 3/4,\ x'(0) = -1.$$

62. *Bestimme* die Lösungsmenge der DGL $x'' = x' + 2x + \cos(t) + \sin(t)$. [4]

63. (Die Inhomogene Schwingungsgleichung)
Wir betrachten die inhomogene Schwingungsgleichung [3]

$$mx'' + rx' + kx = A\cos(wt), \qquad m, r, k, w, A > 0. \tag{4}$$

Bestimme Konstanten $B, \Phi > 0$, so daß $x(t) = B\cos(wt - \Phi)$ eine Lösung der DGL (4) ist.

64. Wir betrachten folgende homogene lineare DGL zweiter Ordnung

$$x''(t) + \frac{1}{t}x'(t) - \frac{1}{t^2}x(t) = 0$$

auf dem Intervall $I = (0, \infty)$. Wir prüfen sofort nach, daß $x_1(t) = t$ eine Lösung dieser DGL ist. Wir wollen nun eine zweite (von x_1 linear unabhängige) Lösung x_2 bestimmen.

(a) *Bestimme* die Wronski-Determinate $w(t)$ bis auf eine multiplikative Konstante $c \neq 0$. [1]

(b) *Setze* die bekannte Lösung x_1 in die Definition der Wronski-Determinante ein und *berechne* nun $w(t)$ in Abhängigkeit von $x_2(t)$ und $x_2'(t)$. [1]

(c) *Folgere* nun, daß x_2 der DGL $x_2' = x_2(t)/t + c/t^2$ genügt und löse diese DGL. [2]

65. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertierbare Matrizen. *Zeige*, daß für eine beliebige Matrix $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt: [2]

$$\mathscr{A} := \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

ist invertierbar und die Inverse ist gegeben durch

$$\mathscr{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/ana3

ulm university universität uulm

Dr. Gerhard Baur
Dr. Markus Biegert
WS 07/08

Gesamt: 28 Punkte

Übungen zu Analysis III

Blatt : 14$*$

Abgabetermin : Donnerstag, 14.02.2008

66. **(Euler-Polygonzug)** [4]

Gegeben sei das AWP $x' = x$, $x(0) = 1$ und eine Partition $t_\nu = \nu \cdot h$, $h = T/m > 0$, $\nu = 0, \ldots, m$ des Intervalls $I = [0, T]$. *Bestimme* nun den dazugehörigen Eulerschen Polygonzug.

67. *Untersuche* die Differentialgleichung $x' = Ax$ auf Stabilität, wobei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben ist durch [8]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis:

- Dies entspricht der Differentialgleichung $x^{(4)} + 2x'' + x = 0$.
- Untersuche auf Stabilität bedeutet: Entscheide mit Begründung ob das System (i) **instabil**, (ii) **stabil** oder (iii) **asymptotisch stabil** ist.

68. Es sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Finde eine positiv definite Matrix P mit $A^t P + PA = -E$ (Lyapunov Gleichung). [4]

(b) Analysiere die Mengen $M_c := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x^t P x = c\right\}$ für Konstanten $c \in (0, \infty)$. [8]

(c) Löse das Anfangswertproblem $x' = Ax$ mit $x(0) = (1, 0)^t$. [4]

(*) Hinweise:

- Die Punkte dieses Blattes zählen als Zusatzpunkte.
- Korrigiert werden nur die Lösungen der Studenten, welche noch keine 130 Punkte in den Blättern 1 bis 13 erreicht haben.
- Die Bearbeitung der Aufgaben wird von allen Studenten verlangt. Die Abgabe der Lösungen ist nicht erforderlich sofern 130 Punkte in den Blättern 1-13 erreicht wurden.