Übungen zu Analysis 4
Sommersemester 2007.

Übungen zu Analysis IV

Blatt : 1

Abgabetermin : Montag, 23.04.2007

1. Seien $r_1, r_2 \geq 0$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$. *Zeige* mit Hilfe der Additionstheoreme des Cosinus und des Sinus, daß für die komplexen Zahlen $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ und $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$ gilt: [2]

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

2. *Berechne* den Betrag, das Argument, den Real- und den Imaginärteil folgender Zahlen aus $\mathbb{C}$.

(a) $z_1 := \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)$. [2]

(b) $z_2 := [2\cos(\pi/4) + 2i\sin(\pi/4)]^2$. [2]

(c) $z_3 := 3 + 4i$. [2]

3. Sei γ die Kurve gegeben durch die Parameterdarstellung $z(t) = \cos(t) + i\sin(t)$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$.

(a) *Entscheide*, ob γ ein Weg ist und ob dieser geschlossen ist oder nicht. [2]

(b) *Berechne* die Länge der Kurve γ. [2]

(c) *Berechne* die komplexen Kurvenintegrale $\int_\gamma 1/z\,dz$ und $\int_\gamma z\,dz$. [2]

(d) *Entscheide*, ob das Kurvenintegral über $1/z$ wegunabhängig in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist. [2]

4. Wir betrachten die komplexen Zahlen $z_1 := 1 + i$ und $z_2 := 0$.

(a) Auf welche Punkte werden z_1 und z_2 durch die stereographische Projektion P abgebildet? [2]

(b) *Berechne* den chordalen Abstand von z_1 und z_2. [2]

Prof. Dr. W. Balser
Dr. M. Biegert
SS 2007

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Analysis IV

Blatt : 2

Abgabetermin : Donnerstag, 03.05.2007

5. *Zeige:* Jede Möbiustransformation f ist bzgl. des chordalen Abstandes gleichmäßig stetig. [2]

6. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$ und die Möbiustransformation $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}^\star$ gegeben durch $f(z) := (az+b)/(cz+d)$. *Zeige,* daß es $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ gibt mit $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ so daß [2]

$$f(z) = \frac{\alpha z - \beta}{\gamma z - \delta} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^\star.$$

7. *Bestimme* die Möbiustransformation f mit $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$ und $f(0) = i$. *Stelle* nun die Möbiustransformationen $g := f \circ f$ und $h := f^{-1}$ in folgender Form dar: [4]

$$\frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

8. *Bestimme* die Möbiustransformation f mit $f(1) = i$, $f(i) = -1$ und $f(-1) = -i$ sowie die Menge [2]

$$M := \{ f(z) : z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \}.$$

9. *Bestimme* mit Hilfe des Doppelverhältnisses eine Möbiustransformation g mit den Fixpunkten i und $-i$ und mit $g(1) = 0$. Wie sieht $M := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(g(z)) < 0\}$ aus? [4]

10. *Bestimme* den Mittelpunkt sowie den Radius des Kreises welcher durch folgende Punkte geht: [2]

$$z_1 = i, \quad z_2 = 1 + i \quad \text{und} \quad z_3 = 2.$$

11. *Bestimme* die Menge M aller $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z+2|$. [2]

12. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) := \overline{z}$. *Bestimme* die Menge der Punkte $z \in \mathbb{C}$ in welchen die Funktion f differenzierbar ist. [2]

Übungen zu Analysis IV

Blatt : 3

Abgabetermin : Donnerstag, 10.05.2007

13. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch [2]

$$f(z) := \begin{cases} e^{-1/|z|} & \text{falls } z \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, daß f im Punkt $z_0 = 0$ differenzierbar ist.

14. *Zeige* folgende Identitäten:

(a) $\sinh(z) = -i\sin(iz)$ und $\cosh(z) = \cos(iz)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. [2]

(b) $\cos(z)\cos(z) + \sin(z)\sin(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. [1]

(c) $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. [1]

(d) $\sinh'(z) = \cosh(z)$ und $\cosh'(z) = \sinh(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. [2]

<u>Hinweis:</u> Siehe Definition 3.2.1, Lemma 3.2.2, Lemma 3.2.3 und Satz 3.2.5.

15. *Finde* alle möglichen Werte für $\log(3+4i)$. [2]
<u>Hinweis:</u> Vergleiche Aufgabe 2(c).

16. (a) *Bestimme* für $n \in \mathbb{N}$ die Lösungsmenge der Gleichung $z^n = -1$. [3]

(b) Sei log der Hauptzweig des Logarithmus und $\alpha \in \mathbb{C}$. Dazu betrachten wir die Funktion [3]

$$f : \mathbb{C}(-\pi) \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}.$$

Berechne die Ableitung f' auf $\mathbb{C}(-\pi) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

17. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f(z) := \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ wobei $a_n \neq 0$. [4]
Zeige, daß es ein $r \in (0, R)$ und Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt so daß

$$c_1|z|^n \leq |f(z)| \leq c_2|z|^n \qquad \forall z \in K(0,r).$$

Übungen zu Analysis IV

Blatt : 4

Abgabetermin : Montag, 21.05.2007

18. Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und seien $u, v : G \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenziere Funktionen welche die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen, also [3]

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x.$$

Zeige, daß die Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, gegeben durch $f(z) := u(z) + iv(z)$, holomorph auf G ist.

Hinweis: Benutze folgenden Satz aus Analysis 2:

Satz 1 *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f = (f_1, f_2) : G \to \mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar und sei*

$$A(z) := \begin{pmatrix} (\partial f_1/\partial x)(z) & (\partial f_1/\partial y)(z) \\ (\partial f_2/\partial x)(z) & (\partial f_2/\partial y)(z) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\lim\limits_{\mathbb{R}^2 \ni h \to 0} (f(z+h) - f(z) - A(z) \cdot h)/|h| = 0$ *für alle* $z \in G$.

19. Für welche der folgenden Paare u und v sind die Cauchy-Riemannschen Dgln. auf G erfüllt?

(a) $G := \mathbb{C}$, $u(x,y) := e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$ und $v(x,y) := e^{x^2-y^2} \sin(2xy)$. [1]

(b) $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $u(x,y) := (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$ und $v(x,y) := -2xy/(x^2 + y^2)^2$. [1]

(c) $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $u(x,y) := (x^2 + y^2)/(x^2 + y^2)^2$ und $v(x,y) := 2xy/(x^2 + y^2)^2$. [1]

20. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathscr{H}(G)$, d.h. f ist eine auf G holomorphe Funktion.

(a) *Zeige:* Ist $\mathrm{Re}(f)$ konstant auf G, dann ist auch f konstant auf G. [2]

(b) *Zeige:* Ist $|f|$ konstant auf G, dann ist auch f konstant auf G. [2]

(c) *Zeige:* Ist $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in G$, dann ist $f \equiv c \in \mathbb{R}$. [2]

21. *Bestimme* zu $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $u(x,y) := 3x^2y - y^3$, alle Funktionen $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, so daß $f(x+iy) := u(x,y) + iv(x,y)$ eine ganze Funktion ist. [3]

22. Sei γ ein Weg in $\mathbb{C}$ und die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch [3]

$$f(z) := \int_\gamma \sin(w) e^{wz}\, dw.$$

Bestimme die Potenzreihenentwicklung von f und *folgere*, daß f eine ganze Funktion ist.

23. *Zeige*: Ist γ ein Weg in $\mathbb{C}$ von $a \neq 0$ nach $b \neq 0$ welcher den Nullpunkt vermeidet, so gilt bei geeigneter Wahl von $\log(a)$ und $\log(b)$ folgende Identität: [2]

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \log(b) - \log(a).$$

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/ana4

Übungen zu Analysis IV

Blatt : 5

Abgabetermin : Donnerstag, 24.05.2007

24. *Skizziere* (z.B. mit Maple) den geschlossenen Weg γ gegeben durch die Parameterdarstellung [4]

$$z(t) := \sin(t)\,((4\pi - t)t - 20) + i\cos(t)\,(20 - (4\pi - t)t)\,, \qquad t \in [0, 4\pi],$$

und *bestimme* den Index von γ auf jeder Zusammenhangskomponente des Komplementes von γ.

Hinweis: Dies könnte man in Maple wie folgt machen.

```
> with(plots):
> z(t):=sin(t)*((4*Pi-t)*t-20),cos(t)*(20-(4*Pi-t)*t);
> plot([z(t),t=0..4*Pi],scaling=constrained);
> animatecurve([z(t),t=0..4*Pi],color=red,frames=100,numpints=1000,scaling=constrained);
```

25. Wir betrachten die Wege γ_1 und γ_2 gegeben durch die Parameterdarstellungen $z_1(t) := e^{it}$ für $t \in [0, \pi]$ und $z_2(t) := e^{it}$ für $t \in [\pi, 2\pi]$. *Berechne* folgende Kurvenintegrale [4]

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz, \qquad \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz$$

für

(a) $f(z) := z$. (b) $f(z) := 1$. (c) $f(z) := z^{-1}$. (d) $f(z) := z^{-2}$.

26. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

(a) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. *Zeige*: $z_0 \in G$ ist genau dann eine Nullstelle k-ter Ordnung von f wenn [4]

$$f^{(j)}(z_0) = 0 \quad \forall 0 \le j \le k-1 \qquad \text{und} \qquad f^{(k)}(z_0) \ne 0.$$

(b) *Zeige*: Ist $f \not\equiv 0$ auf G so hat jede Nullstelle $z_0 \in G$ von f endliche Ordnung. [4]

Übungen zu Analysis IV

Blatt : 6

Abgabetermin : Dienstag, 05.06.2007

Am Dienstag, 05.06. findet anstatt der Vorlesung die Übung statt !!!

27. (Eindeutigkeit der holomorphen Fortsetzung) [2]

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet welches das Intervall $I := (0, \infty)$ enthält. Wir sagen: Eine auf I definierte Funktion f besitzt eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{f}$ in G, falls $\tilde{f}$ in G holomorph ist und $\tilde{f}|_I = f$. *Zeige*, daß es zu jeder Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ höchstens eine holomorphe Fortsetzung in G gibt.

28. (Differenz holomorpher Funktionen) [2]

Zeige: Sind f und g holomorph in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und ist $z_0 \in G$, so daß $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \geq k_0 \in \mathbb{N}$, so gibt es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ vom Grade $\leq k_0 - 1$, so daß $f = g + p$ in G.

29. (Satz von Liouville verschärft) [2]

Sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ eine ganze Funktion, so daß $\mathrm{Re}(f)$ beschränkt ist. *Zeige*, daß f konstant ist.

30. (Nullstellen holomorpher Funktionen)

Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $\varphi \in \mathscr{H}(\Omega)$ eine auf Ω holomorphe Funktion und ist $z_0 \in \Omega$, so bezeichnen wir mit $\mathrm{Ord}(\varphi, z_0) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ die Ordnung der Nullstelle z_0 von φ.
Seien $f, g \in \mathscr{H}(\Omega)$ holomorphe Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ und sei $z_0 \in \Omega$. Desweiteren sei $h \in \mathscr{H}(O)$ eine auf einer offenen Menge $O \supset g(\Omega)$ holomorphe Funktion. *Zeige* folgende Aussagen:

(a) $\mathrm{Ord}(f+g, z_0) \geq \min\{\mathrm{Ord}(f, z_0), \mathrm{Ord}(g, z_0)\}$. [1]

(b) $\mathrm{Ord}(f+g, z_0) = \min\{\mathrm{Ord}(f, z_0), \mathrm{Ord}(g, z_0)\}$, falls $\mathrm{Ord}(f, z_0) \neq \mathrm{Ord}(g, z_0)$. [1]

(c) $\mathrm{Ord}(f \cdot g, z_0) = \mathrm{Ord}(f, z_0) + \mathrm{Ord}(g, z_0)$. [2]

(d) $\mathrm{Ord}(h \circ g, z_0) = \mathrm{Ord}(h, g(z_0)) \cdot \mathrm{Ord}(g - g(z_0), z_0)$. (wobei hier $0 \cdot \infty := \infty \cdot 0 := 0$ gesetzt ist) [2]

Hinweis: Benutze Aufgabe 26 bzw. Lemma 5.3.2 der Vorlesung.

31. (Zusammenhang: Nullstellen und Pole) [2]

Sei $f \in \mathscr{H}(K'(z_0, r))$ mit $r > 0$ und $m \in \mathbb{N}_0$. *Zeige:* Genau dann hat f in z_0 einen Pol der Ordnung m wenn $1/f$ in z_0 eine Nullstelle m-ter Ordnung hat.
Hinweis: Benutze Definition 6.1.1 und beachte Satz 6.1.4(c).

32. (Bestimmung von Singularitäten) *Bestimme* Lage und Art der isolierten Singularitäten für [je 1]

(a) $f(z) := \cos(z)/z$.

(b) $f(z) := [\cos(z) - 1]/z$.

(c) $f(z) := \cos(1/z)$.

(d) $f(z) := \cot(z) := \cos(z)/\sin(z)$.

(e) $f(z) := z\cot(z)$.

(f) $f(z) := (z^2 + i)/(z^4 + 1)$.

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/ana4

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Analysis IV

Blatt : 7

Abgabetermin : Donnerstag, 14.06.2007

33. (Mittelwertformel) [2]

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ eine auf Ω holomorphe Funktion, $z_0 \in \Omega$ und sei $r > 0$ so daß $\overline{K(z_0, r)} \subset \Omega$. *Zeige* mit Hilfe der Cauchy-Integralformel folgende Mittelwertformel:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt.$$

34. (Cauchy-Gebiete und Stammfunktionen)

Entscheide ob die Funktion f auf Ω eine Stammfunktion besitzt.

(a) Für $f(z) := (z^2 + z + 1)/(z^2 - 3z + 2)$ und $\Omega := K(0,1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. [1]

(b) Für $f(z) := 1/z$ und $\Omega := K(0,0,1) := K(0,1) \setminus \{0\}$. [1]

(c) Für $f(z) := \cos(\pi z/2)/(z-1)$ und $\Omega := K(1,0,1) := K(1,1) \setminus \{1\}$. [1]

(d) Für $f(z) := [(z^2 - 2z + 1)(z^2 - 4z + 4)]^{-1}$ und $\Omega := K(1,0,1) = K(1,1) \setminus \{1\}$. [2]

35. (Klassifikation von Singularitäten) [3]

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $z_0 \in \Omega$ und $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Ist z_0 ein Pol k-ter Ordnung von f, so setzen wir $\operatorname{Ord}(f, z_0) := -k$ und ist z_0 eine wesentliche Singularität von f, so setzen wir $\operatorname{Ord}(f, z_0) := -\infty$. Nach Satz 6.2.5 können wir f in eine Laurentreihe in $K(z_0, 0, r) \subset \Omega$ mit $r := \operatorname{dist}(z_0, \Omega^c) > 0$ entwickeln. Diese sei gegeben durch

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Zeige, daß $\operatorname{Ord}(f, z_0) = \inf\{k \in \mathbb{Z} : a_k \neq 0\}$. $(\inf \emptyset = \infty)$

36. (Laurentreihen)

(a) *Bestimme* alle möglichen Laurentreihenentwicklungen der Funktion $f(z) := (z^2 - 3z)^{-1}$ um folgenden Entwicklungspunkte: [5]

(i) Um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. (2 Gebiete)

(ii) Um den Entwicklungspunkt $z_0 = 4$. (3 Gebiete)

(b) *Entwickle* $f(z) := (z+2)^{-2}$ in eine Laurentreihe um $z_0 = 0$ die in $K(0, 2, \infty)$ konvergiert. [2]

37. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und seien $f, g \in \mathscr{H}(\Omega)$ auf Ω holomorphe Funktionen. *Zeige*: Gilt für ein $z_0 \in \Omega$ die Ungleichung $\operatorname{Ord}(f, z_0) \geq \operatorname{Ord}(g, z_0) = n \in \mathbb{N}$, so folgt: [3]

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}.$$

Übungen zu Analysis IV

Blatt : 8

Abgabetermin : Donnerstag, 21.06.2007

38. (Wegekomplexe)
Wir betrachten den Wegekomplexes $\mathscr{K} :=< \gamma_1, \gamma_2 >$, wobei die Wege γ_j gegeben seien durch die Parametrisierung $z_j(t)$, $t \in [0,1]$ mit $z_1(t) := 2\exp(2\pi i t)$ und $z_2(t) := \exp(-2\pi i t)$.

(a) *Bestimme* die Indexfunktion des Wegekomplexes $\mathscr{K}$. [2]

(b) *Zeige* daß für jede holomorphe Funktion f auf $G := \mathbb{C} \setminus \overline{K(0,1/2)}$ gilt: $\int_{\mathscr{K}} f(z)\,dz = 0$. [2]

39. (Einfach zusammenhängende Gebiete)

(a) *Zeige* anhand eines Beispiels, daß ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ welches die Vereinigung von einfach zusammenhängenden Gebieten ist, selbst nicht einfach zusammenhängend sein muß. [2]

(b) Seien $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ konvexe Gebiete mit $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. *Zeige*, daß $G := G_1 \cup G_2$ einfach zusammenhängend ist. [2]

(c) *Entscheide* welche der folgenden Gebiete einfach zusammenhänged sind. [je $\frac{1}{2}$]

(i) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ii) $\mathbb{C} \setminus [0,1]$
(iii) $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ (iv) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2 \text{ oder } |z - i| < 2\}$.

40. (Homotopie)
Die Wege γ_j seien gegeben durch die Parameterdarstellung $z_j(t)$, $t \in [0,1]$ mit $z_j(t) := je^{2\pi i t}$.

(a) *Entscheide* ob γ_1 in $G_1 := \mathbb{C}$ nullhomotop ist. [1]

(b) *Entscheide* ob γ_2 in $G_2 := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nullhomotop ist. [1]

(c) *Entscheide* ob γ_3 in $G_3 := \mathbb{C} \setminus \{2\pi i\}$ nullhomotop ist. [1]

(d) *Entscheide* ob γ_1 und γ_2 in G_3 homotop sind. [1]

41. Sei $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Gebiet.

(a) Sei γ ein geschlossener Weg in G und $g(z) := z^k$ mit $k \in \mathbb{N}$. *Zeige*, daß $\mathrm{Ind}_{g(\gamma)}(0) = k \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(0)$. Hierbei ist der geschlossene Weg $g(\gamma)$ gegeben durch die Parameterdarstellung $g(z(t))$, $t \in [0,1]$ falls $z(t)$, $t \in [0,1]$ die Parameterdarstellungs des Weges γ ist. [2]

(b) Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine auf G holomorphe Funktion mit $f(z)^k = z$ für alle $z \in G$ $(k \in \mathbb{N})$. *Zeige*, daß für jeden geschlossenen Weg γ in G gilt: [3]

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = k \cdot \mathrm{Ind}_{f(\gamma)}(0).$$

Der Weg $f(\gamma)$ ist gegeben durch die Parameterdarstellung $f(z(t))$, $t \in [0,1]$ falls $z(t)$, $t \in [0,1]$ die Parameterdarstellungs des Weges γ ist.

(c) Sei γ ein geschlossener Weg in G mit $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 1$. *Zeige*, daß es für $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ kein $f \in \mathscr{H}(G)$ mit $f(z)^k = z$ gibt, d.h. es gibt keinen holomorphen Zweig der k-ten $\sqrt{\cdot}$ in G. [1]

ulm university universität uulm

Prof. Dr. W. Balser
Dr. M. Biegert
SS 2007

Gesamt: 24 Punkte

Übungen zu Analysis IV

Blatt : 9

Abgabetermin : Donnerstag, 28.06.2007

42. (Residuen-Berechnung)

(a) *Bestimme* $\mathrm{Res}_1(f)$ für $f(z) := \cos(z\pi/2)(z-1)^{-1}$. [1]

(b) *Bestimme* $\mathrm{Res}_0(\cot)$ wobei $\cot(z) := \cos(z)/\sin(z)$. [1]

(c) *Bestimme* $\mathrm{Res}_{\pi/4}(f)$ für $f(z) := \sin(z)(z-\pi/4)^{-2}$. [2]

(d) *Bestimme* $\mathrm{Res}_0(f)$ und $\mathrm{Res}_1(f)$ für $f(z) := z^{-1} + (z-1)^{-2}$. [1]

43. (Berechnung von Kurvenintegralen) Berechne das Kurvenintegrale $\int_\gamma f(z)\,dz$ für

(a) $f(z) := \cot(z)$ und γ gegeben durch die Parametrisierung $z(t) = \exp(2\pi it)$, $t \in [0,1]$. [1]

(b) $f(z) := \sin(z)(z-\pi/2)^{-2}$ und γ gegeben durch die Param. $z(t) = \pi e^{2\pi it}$, $t \in [0,1]$. [1]

44. (Integralberechnung mit Hilfe des Residuensatzes)

(a) *Berechne* das uneigentliche Riemann-Integral [2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx.$$

(b) *Berechne* die uneigentlichen Riemann-Integrale [4]

$$\text{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{(1+x^2)^2}\,dx \quad \text{und} \quad \text{(ii)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$$

(c) *Berechne* folgende Integrale vom Typ $\int_0^\infty f(x)\,dx$ mit $f(x) = f(-x)$. [4]

$$\text{(i)} \int_0^{\infty} \frac{1}{2+x^2}\,dx. \qquad \text{(ii)} \int_0^{\infty} \frac{x^2-2}{x^4+5x^2+4}\,dx$$

45. Sei $g(z) := z^{2007} + 6z^{2005} + 28z^6 + 1$. *Bestimme* die Anzahl der Nullstellen (mit VFH) von g in

(a) der Einheitskreisscheibe $K(0,1)$. [1]

(b) im Kreisring $K(0,1,2)$. [1]

(c) in $K(0,2,\infty)$. [1]

46. Sei $f \in \mathscr{H}(K(0,R,\infty))$ wobei $K(0,R,\infty) := \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. Dann definieren wir das Residum von f in ∞ durch $\mathrm{Res}_\infty(f) := -\mathrm{Res}_0(g)$ wobei $g(w) := f(1/w)w^{-2}$ für $w \in K(0,0,1/R)$.

(a) Sei $S := \{z_i \in \mathbb{C} : i = 1,\dots,n\} \subset \mathbb{C}$ eine endliche Menge und $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}\setminus S)$ eine auf $\mathbb{C}\setminus S$ holomorphe Funktion. Wir setzen $\hat{S} := S \cup \{\infty\}$. *Zeige*, daß $\sum_{z\in\hat{S}} \mathrm{Res}_z(f) = 0$. [2]

(b) Sei f eine ganze Funktion. *Zeige*, daß $\mathrm{Res}_\infty(f) = 0$. [1]

(c) Seien $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ Polynome mit $\mathrm{grad}(Q) \geq 2 + \mathrm{grad}(P)$. *Zeige*, daß $\mathrm{Res}_\infty(P/Q) = 0$. [1]

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/ana4

Prof. Dr. W. Balser
Dr. M. Biegert
SS 2007

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Analysis IV

Blatt : 10

Abgabetermin : Donnerstag, 05.07.2007

47. (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $z_0 \in \Omega$ und $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. *Zeige*, daß z_0 keine wesentliche Singularität von f ist. [3]

Anleitung: Wähle $r > 0$ so daß $K(z_0, 0, r) \subset \Omega$. Dann sind $f(K(z_0, 0, r/2))$ und $f(K(z_0, r/2, r))$ offen und disjunkt. Eine Anwendung von Satz 6.1.7 liefert dann die Behauptung.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $z_0 \in \Omega$ und $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. *Zeige*: Hat f einen Pol in z_0, so ist z_0 ein Pol 1. Ordnung von f. [3]

Anleitung: Betrachte die Funktion $g := 1/f$ in $K(z_0, 0, \delta)$ für $\delta > 0$ klein genug und zeige, daß $g : K(z_0, \delta) \to \mathbb{C}$ injektiv ist. Eine Anwendung von Satz 9.2.1 zeigt, daß $g'(z_0) \neq 0$.

48. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $H := \{\overline{z} : z \in G\}$. Weiter sei $G \cap H$ ein Gebiet, $G \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ und sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in G \cap \mathbb{R}$. *Zeige*, daß es dann genau eine in $G \cup H$ holomorphe Funktion g gibt mit $g = f$ auf G. [3]

Anleitung: Betrachte die Funktion $h(z) := \overline{f(\overline{z})}$ und verwende den Identitätssatz für holomorphe Funktionen.

49. (a) Sei f eine ganze und nicht-konstante Funktion. *Zeige*, daß $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt, d.h. zu jedem $a \in \mathbb{C}$ gibt es eine Folge $z_n \in \mathbb{C}$ mit $f(z_n) \to a$ für $n \to \infty$. [2]

(b) Sei f eine ganze Funktion mit $f(z) \notin \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. *Zeige*, daß f konstant ist. [2]

50. Seien $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ Gebiete, $g : G_1 \to G_2$ und $f : G_2 \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. *Zeige*: Ist $h := f \circ g \equiv 0$ auf G_1, so ist g konstant auf G_1 oder $f \equiv 0$ auf G_2. [2]

51. (a) Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von holomorphen Funktionen in $K(0,1)$ welche für jedes fest $r \in [0,1)$ gleichmäßig auf $K_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ gegen eine Funktion f konvergiert. *Zeige*, daß $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ kompakt in $K(0,1)$ gegen f konvergiert. [2]

(b) Sei $0 < r < R < \infty$, $U := K(0, r, R)$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion welche auf U gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann. *Zeige*, daß f holomorph auf $K(0, R)$ fortgesetzt werden kann. [2]

52. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Cauchy-Gebiet und $f : G \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. *Zeige*, daß es eine holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ gibt mit $f = e^g$ auf G. [1]

Anleitung: Zeige die Existenz einer holomorphen Funktion h auf G mit $h' = f'/f$ und definiere $k := e^h/f$. Was ist k'?

Übungen zu Analysis IV

Blatt : 11

Abgabetermin : Donnerstag, 12.07.2007

53. (a) *Zeige*, daß für $x \in \mathbb{R}$ und $w \in \mathbb{C}$ gilt: $|w^x| = |w|^x$. Dabei sei a^x für $a \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ reell. [1]

(b) *Zeige*, daß für $x \in \mathbb{R}$, $x < 1$ gilt: [1]

$$\lim_{r \to 0+} \int_{|w|=r} e^w w^{-x}\, dw = 0.$$

(c) *Zeige*, daß für $x \in \mathbb{R}$, $x < 1$ gilt: [2]

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^w}{w^x}\, dw$$

wobei wir hier entlang der Geraden $\arg(w) = -\pi$, also der negativ-reellen Achse, von ∞ bis zum Ursprung und von dort wieder zurück nach ∞ entlang der negativ-reellen Achse $\arg(w) = +\pi$ laufen. Der Zweig der Funktion w^x ist hierbei entsprechend der Vorgabe der Argumentwerte zu wählen.

(d) *Zeige*, daß für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt: $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$. [3]

54. Sei f eine ganze Funktion. *Zeige*: Ist $\mathrm{Re}(f) = 0$ auf $\partial K(0,r)$ mit $r > 0$, so ist f konstant. [2]

55. (a) *Zeige*, daß die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u(x,y) := \sin(x)\sinh(y)$ harmonisch ist und *bestimme* eine ganze Funktion f, so daß $u = \mathrm{Re}(f)$. [2]

(b) Sei f eine nicht-konstante ganze Funktion. *Zeige*, daß es keine ganze Funktion F gibt mit $\mathrm{Re}(F) = \exp(\mathrm{Re}(f))$. [2]

56. Seien f und g ganze Funktionen mit $f^2 + g^2 = 1$. *Zeige*, daß es eine ganze Funktion h gibt, so daß [3]

$$f(z) = \cos(h(z)), \qquad g(z) = \sin(h(z)) \qquad\qquad (z \in \mathbb{C}).$$

57. *Zeige*, daß $\arctan(z) = -\frac{i}{2}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{ix : x \in \mathbb{R}, |x| \geq 1\}$, wobei log passend gewählt sei. [2]

58. *Entscheide* ohne Begründung welche der folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Je richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, je falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen. Die Gesamtpunkte für diese Aufgabe ist dann das Maxiumum von 0 und der Summe der Punkte der jeweiligen Antworten. [2]

(a) Ist f eine ganze Funktion, so ist $\mathrm{Res}_z(f) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Ist h harmonisch auf $K'(0,1)$, so gibt es eine Funktion $f \in \mathscr{H}(K'(0,1))$ mit $h = \mathrm{Re}(f)$.

(c) Die Potenzreihe einer ganzen Funktion hat immer den Konvergenzradius $R = \infty$.

(d) Für jede holomorphe Funktion f auf dem Kreisring $K(0,1,2)$ gibt es Funktionen $g \in \mathscr{H}(K(0,2))$ und $h \in \mathscr{H}(K(0,1))$ mit $f(z) = g(z) + h(1/z)$ für alle $z \in K(0,1,2)$.