Übungen zu HM3 für Elektrotechniker
Wintersemester 2004/05.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Biegert
WS 04/05

Gesamt: 20 Punkte

Abgabetermin: Fr, 22.10.2004

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 1

1. Welche der folgenden Mengen sind Normalbereiche vom Typ I, vom Typ II oder sogar Standardbereiche?

(a) $M_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1\right\}$. [0,5]

(b) $M_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1], 0 \leq y \leq 1 + x^2\right\}$. [0,5]

(c) $M_3 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1], 0 \leq x \leq 1 + y^2\right\}$. [0,5]

(d) $M_4 := [0,3]^2 \setminus (1,2)^2$. [0,5]

2. Sei γ eine geschlossene Kurve in der Ebene und v ein Vektorfeld. Dann ist der *Fluß* des Feldes v durch γ definiert als das Kurvenintegral $\int_\gamma (v \cdot n)\, ds$, wobei n in jedem Punkt von Spur(γ) den äußeren Normalenvektor bezeichnet.

(a) Betrachte das Vektorfeld $v(x,y) := (2x, -3y)$ und die Ellipse $\gamma(t) := (\cos(t), 4\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Berechne den Fluß des Feldes v durch γ. [2]

(b) Bestimme den Fluß des Vektorfeldes $v(x,y) := (x^2, 5y)$ durch den Rand des Quadrats mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ $(0,1)$. [2]

3. Berechne das Wegintegral $\int_\gamma v \cdot dz$ für

(a) $v(x,y) := (x^2 - xy^3, y^2 - 2xy)$ und $\gamma := \partial[0,2]^2 \subset \mathbb{R}^2$. [2]

(b) $v(x,y) := (ye^x, -2xy^2)$ und $\gamma := \partial\,[-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. [2]

Hinweis: Der Satz von Green (27.4) könnte bei der Berechnung hilfreich sein.

4. Berechne das Riemannintegral $\int_B f$ für

(a) $f(x,y) := x + y$, $B := M_4$ aus Aufgabe (1d). [2]

(b) $f(x,y) := 2xy$, $B := \overline{B}(0,1) := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ [2]

5. Sei B ein regulärer Bereich der stückweise C^1 ist.

(a) Zeige: Für das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $v(x,y) := (x^2 - y^2 - y, -2xy)$ gilt: [1]

$$|B| = \int_{\partial B} v \cdot dx.$$

(b) Mit $n : \partial B \to \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir die äußere Normale. Zeige, daß [1]

$$|B| = \int_{\partial B} x n_1 \, ds = \int_{\partial B} y n_2 \, ds.$$

(c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := \frac{1}{2}(3x^2 - 3y^2)$. Zeige, daß die Länge der Kurve ∂B gegeben ist durch [2]

$$l(\partial B) = \int_{\partial B} \nabla f \cdot n + 1 \, ds.$$

Was kann man hieraus über den Fluß des Gradientenfeldes $v := \nabla f$ durch ∂B sagen?

6. Berechne den Schwerpunkt bei folgenden, homogen mit Masse belegten Bereichen.

(a) Das Dreieck mit den Ecken $(-1,0)$, $(1,0)$ und $(0,2)$. [1]

(b) Der Sinusbogen $B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \sin(x)\right\}$. [1]

Definition: Als Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt der Fläche B bezeichnet man den Punkt $S = (x_s, y_s)$, welcher gegeben ist durch

$$x_s := \frac{1}{M} \int_B x\mu(x,y), \quad y_s := \frac{1}{M} \int_B y\mu(x,y).$$

Hierbei bezeichnet $\mu(x,y)$ die Massendichte und M die Masse, also $M = \int_B \mu(x,y)$.

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 2

7. Sei K die Kugel $K := B(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt 0 und Radius 1. Aus dieser Kugel schneiden wir dann den Zylinder $Z := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 3/4\right\}$ heraus und wollen das verbleibende Volumen berechnen, d.h. berechne das Volumen der offenen Menge $M := K \setminus Z$. [4]
Hinweis: Transformationsformel.

8. Sei $B := \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^2$ der abgeschlossene Kreis im $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt 0 und Radius 1, d.h. [4]

$$B = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

Berechne für die die Menge $Z := B^2 = B \times B \subset \mathbb{R}^4$ das Integral

$$\int_Z w^2y^2 + w^2z^2 + x^2y^2 + x^2z^2 \, d(w,x,y,z).$$

Hinweis: Transformationsformel.

9. Betrachte die abgeschlossene Kugel $K = \overline{B(0,1)}$ im $\mathbb{R}^3$, d.h. $K = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$. Die Massendichte ρ sei gegeben durch $\rho(x,y,z) := 1-(x^2+y^2+z^2)/2$. Berechne nun die Gesamtmasse der Kugel. [4]

10. Die Länge einer regulären Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ist durch das Kurvenintegral $\int_\gamma 1 \, ds$ gegeben. Analog dazu ist die Fäche eines regulären Flächenstücks S als das Oberflächenintegral $\int_S 1 \, dO$ gegeben.

(a) Sei $K := B(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius 1 im $\mathbb{R}^3$ und ∂K deren Oberfläche. Berechne nun den Flächeninhalt von $S := \left\{(x,y,z) \in \partial K : x^2+y^2 \leq 1/2\right\}$. [4]

(b) Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die Menge αM durch [2]

$$\alpha M := \left\{\alpha(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \in M\right\}.$$

Zeige, daß für einen regulären Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{\partial \alpha B} 1 \, dO = \alpha^2 \int_{\partial B} 1 \, dO.$$

Hinweis: Es kann hilfreich sein, zuerst ein reguläres Flächenstück S zu betrachten.

(c) Sei $r > 0$ und die Kugel $B = B(0,r)$ gegeben durch [4]

$$B := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x/r)^2 + (y/r)^2 + (z/r)^2 \leq 1\right\}.$$

Berechne die Oberfläche von B, d.h. die Fläche von ∂B.
Hinweis: Man kann zuerst den Fall $r = 1$ betrachten.

11. Wir betrachten den Zylinder $Z := \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2\right\}$ im $\mathbb{R}^3$ und das Geschwindigkeitsfeld $v(x,y,z) := ((x^3-1)z^2, (y^3+1)z^2, z)^T$ einer Flüssigkeitsströmung. Berechne nun den Fluß F der Füssigkeit durch den Rand des Zylinders Z (von innen nach außen). [4]

12. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) := x+y+z$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x,y,z) := e^{2x-y-z}$. Zeige oder widerlege folgende Aussage: Für jeden regulären Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ gilt: [4]

$$\int_{\partial B} \frac{\partial f}{\partial n} g \, dO = 0.$$

Hier bezeichnet n die äußere Normale in den Randpunkten von B.

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Biegert
WS 04/05

Abgabetermin: Mo, 15.11.2004

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 3

13. Für welche der folgenden Paare u und v sind die Cauchy-Riemannschen Dgln. auf Ω erfüllt.

(a) $\Omega := \mathbb{R}^2$, $u(x,y) := e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ und $v(x,y) := e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$. [1]

(b) $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $u(x,y) := (x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$ und $v(x,y) := -2xy/(x^2+y^2)^2$. [1]

(c) $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $u(x,y) := (x^2+y^2)/(x^2+y^2)^2$ und $v(x,y) := 2xy/(x^2+y^2)^2$. [1]

14. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ eine auf Ω holomorphe Funktion.

(a) Zeige: Ist $\mathrm{Re}(f)$ konstant auf Ω, dann ist auch f konstant auf Ω. [1]

(b) Zeige: Ist $|f|$ konstant auf Ω, dann ist auch f konstant auf Ω. [1]

(c) Zeige: Ist $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \Omega$, dann ist $f \equiv c \in \mathbb{R}$. [1]

15. Wir betrachten die Funktionenreihe [2]

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (1-z^2)^k.$$

Bestimme die Menge $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : f(z) \text{ ist konvergent}\}$ und zeige, daß f holomorph auf Ω ist.

16. Bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihen. [8]

$$f_1(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}, \qquad f_2(z) := \sum_{k=0}^{\infty} 4^k z^{2k},$$

$$f_3(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \qquad f_4(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k.$$

17. Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \cos(z) := \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2} \quad \text{und} \quad \sin(z) := \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}.$$

(a) Zeige, daß die Potenzreihe exp den Konvergenzradius ∞ hat. [1]

(b) Zeige, daß exp eine ganze Funktion ist, d.h. daß exp eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion ist. [1]

(c) Zeige, daß für die komplexe Ableitung gilt: $\exp'(z) = \exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. [1]

(d) Zeige, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\sin'(z) = \cos(z)$ und $\cos'(z) = -\sin(z)$. [1]

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/hme3

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Biegert
WS 04/05

Abgabetermin: Fr, 19.11.2004

Gesamt: 23 Punkte

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 4

18. Zeige, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $(\cos(z))^2 + (\sin(z))^2 = 1$. [1]

19. Berechne $\cos(z)$ und $\sin(z)$ für $z = \pi/2 - i\ln(2)$ und $z = \pi/2 + i\ln(2)$ und überprüfe die Werte mit der in Aufgabe (18) gegebenen Identität. [2]

20. Bestimme alle Nullstellen von $z \mapsto z\sin(z)$ in $\mathbb{C}$ und gib die jeweilige Ordnung der Nullstelle an. [2]

21. Bestimme mit kurzer Begründung, welche der folgenden Mengen einfach zusammenhängend bzw. zusammenhängend sind. [2]

(a) $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$
(c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \neq 0\}$ (d) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2 \text{ oder } |z - i| < 2\}$

22. Wir betrachten die Potenzreihe [3]

$$G(z) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}.$$

Bestimme nun den Konvergenzradius R dieser Potenzreihe und zeige, daß es einen Zweig F des Logarithmus auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ gibt, so daß $F(1+z) = G(z)$ für alle $z \in B(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

23. (a) Berechne das komplexe Kurvenintegral $\int 1/(z^2 - 3 - 4i)\, dz$ für folgende Wege: [5]
(i) $\gamma_1 : |z| = 1$, (ii) $\gamma_2 : |z-1| = 2$, (iii) $\gamma_3 : |z+1| = 2$, (iv) $\gamma_4 : |z| = 3$,
(v) $\gamma_5 := \gamma_2 \cup \gamma_3$.

(b) Berechne folgende komplexe Kurvenintegrale. [6]

(i) $\displaystyle\int_{|z-2|=1} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}\, dz.$ (ii) $\displaystyle\int_{|z-1|=3/2} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}\, dz.$ (iii) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{e^{-z}}{(z+2)^3}\, dz.$

(iv) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\, dz.$ (v) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z}\, dz.$ (vi) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-1-2i|=5} \frac{4z}{z^2+9}\, dz.$

24. Sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ eine ganze Funktion, d.h. eine auf $\mathbb{C}$ holormophe Funktion. Zeige: Ist der Realteil $\operatorname{Re}(f)$ beschränkt, dann ist f konstant. [2]

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 5

25. Wir betrachten die Funktion $f(z) := 1/[(z-1)(z-2)]$. Bestimme alle möglichen Laurentreihenentwicklungen der Funktion f um folgenden Entwicklungspunkt:

(a) Um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$. [2]
Hinweis: Ringgebiete $A_1 := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < 1\}$ und $A_2 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - z_0|\}$.

(b) Um den Entwicklungspunkt $z_0 = 3$. [3]
Hinweis: Welche drei Ringgebiete/Gebiete sind gesucht?

26. Entwickle $f(z) := 1/(z+2i)^2$ in eine Laurentreihe die in $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ konvergiert. [2]

27. Entscheide ob die Funktion f auf Ω eine Stammfunktion besitzt.

(a) Für $f(z) := (z^2+z+1)/(z^2-3z+2)$ und $\Omega := K_1(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. [1]

(b) Für $f(z) := 1/z$ und $\Omega := \dot{K}_1(0) := K_1(0) \setminus \{0\}$. [1]

(c) Für $f(z) := \cos(\pi z/2)/(z-1)$ und $\Omega := \dot{K}_1(1) := K_1(1) \setminus \{1\}$. [1]

(d) Für $f(z) := 1/[(z^2-2z+1)(z^2-4z+4)]$ und $\Omega := \dot{K}_1(1)$. [2]

28. Bestimme für folgende Funktionen Lage und Art der Singularitäten. [6×1]
Hinweis: Gesucht sind hebbare Singularitäten, Pole mit Ordnung und wesentliche Singularitäten.

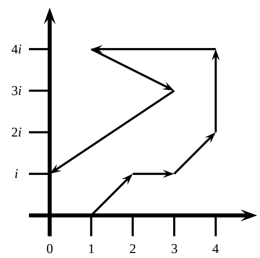
$$\text{(a) } \frac{z}{z+2} \quad \text{(b) } \frac{z^2+i}{z^4+1} \quad \text{(c) } \frac{e^z-1}{z^2(z-1)^3} \quad \text{(d) } \cos(1/z) \quad \text{(e) } \frac{z^4+18z^2+9}{4z(z^2+9)} \quad \text{(f) } \frac{1}{\sin^2(z)}$$

29. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $f, g \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$. Die Funktion f habe in z_0 eine Nullstelle m-ter Ordnung und die Funktion g habe in z_0 einen Pol n-ter Ordnung. Von welchem Typ ist die Stelle z_0 für [4]

$$\text{(a) } f+g \quad \text{(b) } f-g \quad \text{(c) } f \cdot g \quad \text{(d) } g/f.$$

Hinweis: Nullstelle welcher Ordnung? Polstelle welcher Ordnung? Hebbare Singularität?

30. Berechne das komplexe Kurvenintegral $\int_\gamma 1/z \, dz$ wobei γ mit Anfangspunkt 1 und Endpunkt i wie folgt gegeben sei: [2]



Abgabetermin: Fr, 03.12.2004

Gesamt: 27 Punkte

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 6

31. Residuen-Berechnung:

(a) Bestimme $\operatorname{Res}(f,1)$ für $f(z) := \cos(z\pi/2)(z-1)^{-1}$. [1]

(b) Bestimme $\operatorname{Res}(\cot, 0)$ wobei $\cot(z) := \cos(z)/\sin(z)$. [1]

(c) Bestimme $\operatorname{Res}(f, \pi/4)$ für $f(z) := \sin(z)(z-\pi/4)^{-2}$. [2]

(d) Bestimme $\operatorname{Res}(f,0)$ und $\operatorname{Res}(f,1)$ für $f(z) := z^{-1} + (z-1)^{-2}$. [1]

(e) Bestimme die Polstellen z_1, z_2, z_3 von $f(z) := (1+z^4)/(1+z^3)$ und $\operatorname{Res}(f, z_k)$, $k = 1,2,3$. [3]

32. Integralberechnung mit Hilfe des Residuensatzes

(a) Berechne das Integral [2]

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin(t)}\, dt.$$

(b) Berechne das Integral [2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx.$$

(c) Berechne für $w \in (0,1)$ die Integrale [4]

$$\text{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{(1+x^2)^2}\, dx \quad \text{und} \quad \text{(ii)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos(x)}{(1+x^2)^2}\, dx$$

(d) Berechne das komplexe Kurvenintegral [1]

$$\int_{|z-\pi/2|=1} \frac{\sin(z)}{(z-\pi/2)^2}\, dz.$$

33. Berechne folgende Integrale vom Typ $\int_0^\infty f(x)\, dx$ mit $f(x) = f(-x)$. [4]

$$\text{(a)} \int_0^{\infty} \frac{1}{2+x^2}\, dx. \qquad \text{(b)} \int_0^{\infty} \frac{x^2-2}{x^4+5x^2+4}\, dx$$

34. Zeige oder widerlege folgende Aussagen.

(a) Sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f'(z_0) = 0$. Dann ist [1]

$$\int_{|z-z_0|=1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz = 0.$$

(b) Ist $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$ und $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$, dann ist $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$. [1]

(c) Ist $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ und $z_0 \in \mathbb{C}$, dann ist $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$. [1]

(d) Sind $f, g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ und g hat in z_0 eine Nullstelle 1. Ordnung, dann hat f/g in z_0 einen Pol 1. Ord. [1]

(e) Ist $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$, dann gilt für alle $r > 0$ [1]

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz = \int_{|z-z_0|=r} \frac{\operatorname{Res}(f, z_0)}{z-z_0}\, dz.$$

(f) Ist $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ und $g : z \mapsto f(1/z)$ hat einen Pol in $z_0 = 0$, dann ist f ein Polynom. [1]

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Biegert
WS 04/05

Abgabetermin: Fr, 10.12.2004

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 7

35. Entscheide welche der folgenden Funktionen u auf Ω harmonisch sind und bestimme ggf. eine auf Ω holomorphe Funktion f, so daß $u = \mathrm{Re}(f)$.

(a) $u(x,y) = x/(x^2+y^2)$ auf $\Omega = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : x > 0\}$. [1]

(b) $u(x,y) = x^2 - y^2 + x + 1$ auf $\Omega = \mathbb{C}$. [1]

(c) $u(x,y) = x^3 - y^3 + x^2 - y^2 + x - y$ auf $\Omega = \mathbb{C}$. [1]

36. Sei $B = B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskugel in $\mathbb{C}$ und $\partial B = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ deren Rand. Gibt es eine in B holomorphe und auf $\overline{B}$ stetige und nicht-konstante Funktion f, so daß f auf ∂B reell ist? [1]

37. Betrachte die auf $\partial B(0,1) = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ stetige Funktion $\varphi(x,y) = 2x^2 + x$. Sei nun $u : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}$ stetig, u harmonisch in $B(0,1)$ und $u = \varphi$ auf $\partial B(0,1)$. D.h. u ist die Lösung des Dirichletproblems mit der Randfunktion φ. Berechne den Wert von u im Mittelpunkt, d.h. $u(0)$. [1]

38. Prüfe welche der folgenden DGLn exakt sind und bestimme ggf. dazu eine Stammfunktion.

(a) $2xy^2 + (2x^2+2)y' = 0$. [1]

(b) $10y^3x + (15x^2y^2)y' = 0$. [1]

(c) $\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)y' = 0$. [1]

39. Löse die folgende Anfangswertprobleme und überprüfe Dein Ergebnis:

(a) $y' + 2y = e^{-2x}$ mit $y(0) = 3$. [2]

(b) $y' = xe^y$ mit $y(0) = 1$. [2]

(c) $y' = xy^2/(1+x^2)$ mit $y(0) = 1$. [2]

(d) $(2y+x)y' + y = 0$ mit $y(0) = a > 0$. [2]

(e) $y' = -y^2/x^2$ mit $y(1) = 1$. [2]

40. (a) Seien y_1 und y_2 zwei (möglicherweise verschiedene) Lösungen der inhomogenen linearen DGL $y' + a(x)y = f$. Zeige, daß die Differenz $y_h := y_1 - y_2$ eine Lösung der dazugehörigen homogenen DGL ist. [1]

(b) Seien y_1 und y_2 zwei Lösungen der homogenen linearen DGL $y' + a(x)y = 0$. Zeige, daß für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch $y_h := \alpha y_1 + \beta y_2$ eine Lösung der homogenen linearen DGL ist. [1]

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 8

41. Bestimme zwei verschiedene Lösungen y_1 und y_2 auf $\mathbb{R}$ des folgenden AWP: [4]

$$\begin{cases} y' = (3y^2)^{1/3} \\ y(5) = 3. \end{cases}$$

Warum kann hier der Existenz- und **Eindeutigkeit**ssatz (13.6) nicht angewandt werden?

42. Berechne die maximale Lösung (y, I) des AWP [4]

$$\begin{cases} y' = \gamma(\beta - y)y \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

für $\gamma, \beta > 0$ und beantworte die in der Vorlesung gestellte Frage (13.14), ob $I = (-\infty, \infty)$ ist.

43. Wir betrachten die autonome DGL $y' = y^3 - 6y^2 + 11y - 6$ und maximale Lösungen (y_1, I_1) und (y_2, I_2) mit $y_1(0) = 3/2$ und $y_2(0) = 5/2$. Zeige, daß $I_1 = I_2 = \mathbb{R}$ und bestimme die Orbits [4]

$$O_1 = \{y_1(t) : t \in I_1\} \quad \text{und} \quad O_2 = \{y_2(t) : t \in I_2\}.$$

Skizziere nun die Lösungen der AWPe.

44. Für welche Werte $\gamma \in \mathbb{R}$ hat das Anfangswertproblem [4]

$$\begin{cases} y'(t) = \gamma e^{y(t)} \cos(t) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

eine globale Lösung, d.h. eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$.

45. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und ungerade Funktion, d.h. $g(t) = -g(-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Desweiteren sei $h \in C^1(\mathbb{R})$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, daß es eine maximale Lösung (y, I) des AWP [4]

$$\begin{cases} y'(t) = g(t)h(y) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

gibt und daß $y(t) = y(-t)$ für alle $t \in I$.

Bem: I ist in diesem Fall von der Form $I = (-a, a)$ mit $a > 0$. Vgl. dazu Beispiel (13.9).

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 9

46. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u(t) = Au(t); \qquad u(0) = u_0 = (1,1,-1)^T.$$

(a) Berechne e^{tA}. [2]

(b) Berechne die Lösung des AWP. [1]

47. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} = Au(t) + b(t); \quad u(0) = u_0 = (1,-1)^T.$$

(a) Bestimme einen Eigenwert λ sowie einen dazugehörigen Eigenvektor z von A. [1]

(b) Bestimme ein Fundamentalsystem $U(t)$ obiger DGL. [2]

(c) Berechne die dazugehörige Wronskideterminate $W(t)$. [1]

(d) Berechne die Inverse von $U(t)$, also $U(t)^{-1}$. [1]

(e) Berechne die Lösung des AWP. [3]

48. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem:

$$\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} -6t & -10t \\ 2t & 2t \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} te^{-t^2} \\ 0 \end{pmatrix} = A(t)u(t) + b(t); \qquad u(0) = u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei v eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{v} = Bv(t) + c(t)$ (Vgl. Aufgabe 47) mit einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einer stetigen Funktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Welche Differentialgleichung löst $u(t) := v(t^2)/2$? [1]

(b) Löse das obige AWP. **Nur** zur Überprüfung darf Maple wie folgt verwendet werden: [8]

```
> with(linalg):
> sys:=[diff(u1(t),t)=-6*t*u1(t)-10*t*u2(t)+t*exp(-t^2),
        diff(u2(t),t)=2*t*u1(t)+2*t*u2(t),u1(0)=1,u2(0)=1];
> dsolve(sys);
```

49. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} u(t) = Au(t), \qquad u(1) = (1,1,1)^T.$$

(a) Bestimme die Eigenwert(e) der Matrix A. [1]

(b) Bestimme ein zur obigen DGL gehöriges Fundamentalsystem $U(t)$. [3]

(c) Bestimme die eindeutige Lösung des obigen AWP. [1]

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Biegert
WS 04/05

Abgabetermin: Fr, 14.01.2005

Gesamt: 20+8 Punkte

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 10

50. Zeige: Es gibt ein nicht-konstantes Polynom f mit der Nullstellenmenge $N := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ und ein $y_0 < \min N$, so daß für die maximale Lösung (y, I) des AWP $y'(x) = f(y(x))$; $y(0) = y_0$ gilt: $I = \mathbb{R}$. [1]

51. Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $(u, \mathbb{R})$ gegeben durch $u(x) := f(\sin(x))$ eine Lösung der DGL [1]

$$u''(x) + a_1 u'(x) + a_0 u(x) = 0.$$

Zeige, daß auch $(v, \mathbb{R})$ gegeben durch $v(x) := f(\cos(x))$ eine Lösung dieser DGL ist.

52. Wir betrachten die homogene lineare DGL zweiter Ordnung [3]

$$u''(x) + \frac{1}{x} u'(x) - \frac{1}{x^2} u(x) = u''(x) + a_1(x) u'(x) + a_0(x) u(x) = 0; \qquad x > 0.$$

Wir sehen, daß $u_1(x) := x$ eine Lösung der DGL ist. Bestimme nun eine zweite Lösung u_2, so daß

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall x > 0.$$

53. Wir betrachten folgende homogene lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten:

(a) Dritter Ordnung: [2]

$$u'''(x) - 6u''(x) + 11u'(x) - 6u(x) = 0.$$

Bestimme nun eine Basis des 3-dimensionalen Lösungsraums $\mathscr{L}_0$.

(b) Dritter Ordnung: [2]

$$u'''(x) - u''(x) + u'(x) - u(x) = 0.$$

Bestimme nun eine Basis des 3-dimensionalen Lösungsraums $\mathscr{L}_0$.

(c) Vierter Ordnung: [2]

$$u^{(4)}(x) - 6u^{(3)}(x) + 13u^{(2)}(x) - 12u'(x) + 4u(x) = 0.$$

Bestimme nun eine Basis des 4-dimensionalen Lösungsraums $\mathscr{L}_0$.

54. Löse durch Umschreiben in ein lineares System mit konstanten Koeffizienten folgendes AWP: [5]

$$u''(x) - 3u'(x) - 4u(x) = 4x; \qquad u(0) = 3/4,\ u'(0) = -1.$$

55. Löse das folgende AWP [4]

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Au(t) + b; \qquad u(0) = u_0 = 0.$$

56. (a) Bestimme die Abszisse folgender Funktionen.

(i) $t \mapsto e^{2t}$. [1/2]

(ii) $t \mapsto e^{2t-c}$ mit einem $c \in \mathbb{R}$. [1/2]

(iii) $t \mapsto \cos(2t)$. [1/2]

(iv) $t \mapsto \arctan(t)$. [1/2]

(v) $t \mapsto \sin(t)/t$. [1]

(b) Berechne die Laplace-Transformation folgender Funktionen.

(i) $f(t) = \sin^2(t)$. [1]

(ii) $f(t) = te^{2t}$. [1]

(iii) $f(t) = \sin(t)/t$. [1]

(c) Bestimme eine Laplace-transformierbare Funktion f, so daß $\mathscr{L}f(s) = \frac{2s-3}{s^2-3s+2}$. [2]

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 11

57. (a) Bestimme die Laplace-Transformation $\mathscr{L}(f)$ sowie die Abszisse $\mathrm{abs}(f)$ der Funktion $f(t) := t\cos(wt)$. [2]

(b) Bestimme die Laplace-Transformation $\mathscr{L}(f)$ sowie die Abszisse $\mathrm{abs}(f)$ der Funktion $f(t) = t^3$. [2]

(c) Wir betrachten die Funktion $f(t) := (e^t - 1)/t$. Berechne nun die Abszisse $\mathrm{abs}(f)$ sowie $\mathscr{L}f$. [4]

(d) Berechne die Laplace-Transformation der Funktion $f(t) := \chi_{[0,1)\cup[2,3)}$, wobei für eine Menge M die Funktion χ_M gegeben ist durch [2]

$$\chi_M(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M. \\ 0 & \text{falls } x \notin M. \end{cases}$$

58. (a) Sei f eine stückweise stetige und p-periodische Funktion, d.h. $f(t) = f(t+p)$. Zeige, daß [3]

$$\mathscr{L}f(s) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt.$$

(b) Sei $f(t) := |\sin(t)|$. Zeige nun folgende Gleichheit [4]

$$\mathscr{L}f(s) = \frac{1}{1+s^2} \coth(\pi s/2).$$

Dabei ist für $r \neq 0$: $\coth(r) := \cosh(r)/\sinh(r)$.

59. Berechne die Laplace-Transformation $\mathscr{L}f$ der Funktion $f(t) := 1/\sqrt{\pi t}$. [4]
Hinweis: Vergleiche dazu das Beispiel der Vorlesung: Laplace-Transformation der Wurzel.

60. Seien $f(t) := t$ und $g(t) := t^2$ sowie verallgemeinerten Funktionen $v := f + \delta_1$ und $w := g + \delta_2$ gegeben.

(a) Berechne die Faltung $v \star w$. [1]

(b) Berechne die Laplace-Transformation $\mathscr{L}(v \star w)$ mit dem aus Teilaufgabe (a) berechneten Ergebnis. [1]

(c) Berechne die Laplace-Transformationen $\mathscr{L}v$ und $\mathscr{L}w$. [1]

(d) Berechne das Produkt $\mathscr{L}v \cdot \mathscr{L}w$ mit den aus Teilaufgabe (c) berechneten Ergebnissen. [1]

(e) Müssen $\mathscr{L}(v \star w)$ und $\mathscr{L}v \cdot \mathscr{L}w$ übereinstimmen? Falls ja, überprüfe dies mit Deinen Ergebnissen. [1]

61. Bestimme die verallgemeinerte Ableitung folgender Funktionen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$.

(a) $f(t) := |t|$. [1]

(b) $f(t) := 4u(t)$, wobei u die Heaviside-Funktion bezeichnet. [1]

(c) $f(t) := \chi_{[-1,1]}(t)$. [1]

(d) $f(t) := u(t^2 - 2) - u(t^3 - 9)$, wobei u die Heaviside-Funktion bezeichnet. [1]

Abgabetermin: Fr, 28.01.2005
8 Tage bis zur Scheinklausur

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Biegert
WS 04/05

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 12

62. Lineare DGL und Laplace-Transformation: → Im Tutorium wird $\mathscr{L}(\sinh)$ behandelt.

(a) Berechne die Laplacetransformation $\mathscr{L}f$ für $f(t) := \cosh(t)$. [4]

(b) Löse mit Hilfe der Laplacetransformation folgendes AWP: [4]

$$u'''(t) - 6u''(t) + 11u'(t) - 6u(t) = -12e^{-t}, \quad u(0) = u''(0) = 1 \text{ und } u'(0) = 0.$$

63. Der Primzahlsatz (1896):
Bestimme mit Hilfe von Maple die Anzahl der Primzahlen $\pi(n)$ zwischen 2 und $n := 1000000$ und ermittle den Quotient $\pi(n)/[n/\log(n)]$. [2]

```
> n:=1000000;
> p:=0: for i from 2 to n do if isprime(i) then p:=p+1; end if; end do; p;
```

64. Euklidischer Algorithmus:
Berechne den größten gem. Teiler $g = \mathrm{ggT}(a,b)$ und bestimme $x, y \in \mathbb{Z}$, so daß $g = xa + yb$.

(a) Für $a = 17732$ und $b = 4340$. [2]

Du kannst Dein Ergebnis wie folgt mit Maple überprüfen:

```
> a:=17732; b:=4340;
> g:=gcd(a,b);
> isolve(x*a+y*b=g);
```

(b) Für $a = 2805$ und $b = 2461$. [2]

(c) Für $a = 4641$ und $b = 2805$. [2]

65. Modulo Rechnen:
Sei b Deine 6-stellige Matrikelnummer (z.B. $b = 567890$) und e Dein Geburtsjahr (z.b. $e = 1981$). Gibt diese Werte auf Deiner Lösung an und berechne [4]

$$b^e \mod 13,$$

d.h. welchen Rest erhält man wenn man b^e durch 13 teilt? Zur Überprüfung mit Maple:

```
> 567890^1981 mod 13;
```

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

66. Gruppen, Ringe, Körper

(a) Ist $(M,+)$ für $M := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ eine Gruppe? [1]

(b) Ist $(M,\cdot)$ für $M := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ eine abelsche Gruppe? [1]

(c) Ist $M := \mathbb{Z} + i\mathbb{Z} := \{x + iy : x,y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ bzgl. $+$ und $\cdot$ ein Ring? [1]

(d) Zeige, daß $(\mathbb{Z}[x],+,\cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist. [2]

(e) Sei $M(\mathbb{C})$ die Menge aller meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$. Eine Funktion f heißt meromorph, falls sie bis auf Polstellen holomorph ist. Ist $(M(\mathbb{C}),+,\cdot)$ ein Körper? [3]

67. Der RSA-Code: Entschlüsselung

Die öffentlichen Schlüssel $n = 2021027$ und $e = 3001$ seien gegeben. Ein Sender schickt die verschlüsselte Nachricht $c = 603119 = m^e \mod n$. Knacke (z.B. mit Maple $\to$ ifactor) den Code $n = p \cdot q$ mit $p,q \in \mathbb{P}$ und bestimme die gesendete Nachricht m. [4]

68. Der RSA-Code: Verschlüsselung

Ich habe mir zwei Primzahlen p und q gesucht und das Produkt $n = p \cdot q$ berechnet. Desweiteren habe ich mir eine Zahl e gesucht, so daß e und $(p-1)(q-1)$ teilerfremd sind. Diese öffentlichen Schlüssel sind [4]

$$\begin{aligned} n &= 121932631137021795226185032752758725782151044046102621551703 \\ e &= 731595786822130771357110196509885688032239597610549062643 41 \end{aligned}$$

Sei nun m Deine Matrikelnummer. Berechne (z.B. mit Maple) den Code

$$c := m^e \mod n.$$

Der Code c dient zur Abfrage der Punkte in der Scheinklausur vor der offiziellen Bekanntgabe:

`http://frechet.mathematik.uni-ulm.de/hme3/klausur`

69. Berechne die Inverse von

(a) $[5] \in \mathbb{Z}_3$ und $[7] \in \mathbb{Z}_3$ [2]

(b) $[6] \in \mathbb{Z}_{11}$. [2]

(c) $[3] \in \mathbb{Z}_{17}$. [2]

70. Bestimme in jeder Teilaufgabe die Menge aller $x \in \mathbb{Z}$ für welche die Kongruenz erfüllt ist.

(a) $(5 \cdot 7)x = 1 \mod 3$ $\quad\to$ Aufgabe (69a). [2]

(b) $5x = 2 \mod 11$. [2]

(c) $7x = 6 \mod 13$. [2]

(d) $3x = 9 \mod 23$. [2]

71. Wir suchen die kleinste natürliche Zahl x mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} x &= 1 \mod 3 && (1) \\ x &= 2 \mod 5 && (2) \\ x &= 3 \mod 7. && (3) \end{aligned}$$

(a) Bestimme Zahlen e_1 ($\rightarrow$ Aufgabe (70a)), e_2 und e_3 so daß [6]

$$\begin{array}{lll} e_1 = 1 \mod 3, & e_1 = 0 \mod 5, & e_1 = 0 \mod 7. \\ e_2 = 0 \mod 3, & e_2 = 1 \mod 5, & e_2 = 0 \mod 7. \\ e_3 = 0 \mod 3, & e_3 = 0 \mod 5, & e_3 = 1 \mod 7. \end{array}$$

(b) Finde die kleinste natürliche Zahl x mit den Eigenschaften (1), (2) und (3). [4]

72. Hat folgendes System von Kongruenzen eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$. Falls ja, bestimme eine Lösung. [2]

$$\begin{array}{rcl} x &=& 2 \mod 6 \\ x &=& 4 \mod 15. \end{array}$$

73. (a) In der Schule haben wir folgenden Satz gelernt: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn es auch ihre Quersumme ist. Sei also $n \in \mathbb{N}_0$ und $d = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k$ mit $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Zeige, daß [2]

$$d = \sum_{k=0}^{n} a_k \mod 3.$$

(b) Zeige, daß eine Zahl d genau dann durch 9 teilbar ist, wenn es auch ihre Quersumme ist. [2]

(c) Zeige, daß eine Zahl d genau dann durch 11 teilbar ist, wenn es auch ihre alternierende Quersumme ist, d.h. [2]

$$\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \mod 11.$$

Beispiel: $d = 61259$ und alternierende Quersumme $q = 6 - 1 + 2 - 5 + 9 = 11$, also ist $d = 0 \mod 11$, d.h. 11 teilt d.

74. Zeige, daß für $x, y \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{P}$ gilt: [2]

$$(x+y)^p = x^p + y^p \mod p.$$

Hinweis: Für welche $k \in \{0, 1, \ldots, p\}$ ist folgender Binomialkoeffizient durch p teilbar?

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot \cdots \cdot (p-k+2)(p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (k-1) \cdot k} \in \mathbb{N}.$$

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Biegert
WS 04/05

Abgabetermin: Fr, 11.02.2005

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 14

75. Bestimme die Fourier-Transform $\mathscr{F}f$ folgender Funktionen f:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-|t|}\sin(t)$. [2]

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)\chi_{\mathbb{R}_+}(t)$. [2]

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (1+t^2)^{-1}$. [2]

76. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Fourier-transformierbare Funktion. Zeige folgende Aussagen:

(a) **Konjugation:** Es gilt: [1]

$$\mathscr{F}\left(\overline{f}\right)(w) = \overline{(\mathscr{F}f)(-w)}.$$

(b) **Symmetrie:** Ist f gerade bzw. ungerade, so ist auch $\mathscr{F}f$ gerade bzw. ungerade. [2]

(c) **Verschiebung im Zeitbereich:** Für $a \in \mathbb{R}$ und $g(t) := f(t-a)$ gilt: [2]

$$(\mathscr{F}g)(w) = \mathscr{F}(f(t-a))(w) = e^{-iwa}(\mathscr{F}f)(w).$$

(d) **Differentiation im Zeitbereich:** Ist $f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ stückweise stetig differenzierbar und f' Fourier-transformierbar, so gilt [1]

$$(\mathscr{F}f')(w) = iw \cdot (\mathscr{F}f)(w).$$

77. **(Parseval'sche Identität)**
Für $a > 0$ betrachten wir die absolut integrierbare Funktion $f(t) := e^{-at}\chi_{\mathbb{R}_+}(t)$ und deren Fourier-Transformation $F(w) := (\mathscr{F}f)(w)$. Berechne nun [2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2\, dw$$

und überprüfe damit die Aussage des Satzes von Plancherel (31.1).

78. **(Der Umkehrsatz)**

(a) Zeige mit Hilfe des Umkehrsatzes (31.3) folgende Identität für $a > 0$: [3]

$$\int_0^\infty \frac{\cos(wt)}{a^2+w^2}\, dw = \frac{\pi}{2a} \cdot e^{-at} \qquad \forall t > 0.$$

(b) Zeige mit Hilfe der "Differentiation im Zeitbereich" folgende Identität für $a > 0$: [3]

$$\int_0^\infty \frac{w\sin(wt)}{a^2+w^2}\, dw = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-at} \qquad \forall t > 0.$$

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

79. Die Situation:
Heiko und Silke schreiben gerade eine Scheinklausur. Dabei ist Aufgabe 12 eine Multiple Choice Aufgabe. Es sind 8 Aussagen vorhanden die mit einem Kreuz bei **Richtig** oder **Falsch** bewertet werden können. Für jede richtige Bewertung gibt es 2 Punkte und für jede falsche Bewertung der Aussage -2 Punkte. Es besteht die Möglichkeit eine Aussage nicht zu bewerten, dann gibt es 0 Punkte. Bei negativem Punktesaldo gibt es dann für die gesamte Aufgabe 0 Punkte.

(a) Heiko hat keine Ahnung. Er bewertet zufällig alle Aussagen. Bestimme den Erwartungswert (der Punkte für Aufgabe 12) für Heiko.

(b) Silke hat in der Vorlesung etwas mehr aufgepasst und bewertet eine Aussage richtig. Soll Silke jetzt die anderen Aussagen zufällig bewerten?

Hinweis: Welche Verteilung und welche Transformation f sind hier sinnvoll?