Übungen zu HM3 für Elektrotechniker
Wintersemester 2005/06.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Dr. Markus Biegert
WS 2005/06

Gesamt: 20 Punkte

Abgabetermin: Fr, 31.10.2005

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 1

1. Seien $r_1, r_2 \geq 0$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$. **Zeige** mit Hilfe der Additionstheoreme des Cosinus und des Sinus, daß für die komplexen Zahlen z_1 und z_2 gegeben durch $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ und $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$ gilt: [2]

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right).$$

2. Wir betrachten die Kurve γ gegeben durch die Parameterdarstellung $z(t) = e^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$.

(a) **Entscheide**, ob γ ein Weg ist und ob dieser geschlossen ist oder nicht. [2]

(b) **Berechne** die Länge der Kurve γ. [1]

(c) **Berechne** die komplexen Kurvenintegrale $\int_\gamma 1/z\,dz$ und $\int_\gamma 1\,dz$. [4]

(d) **Entscheide**, ob das obige Kurvenintegral $\int_\gamma 1/z\,dz$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ wegunabhängig ist. [1]

3. Wir betrachten die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 0$.

(a) Auf welche Punkte werden z_1 und z_2 durch die stereographische Projektion abgebildet? [2]

(b) **Bestimme** den chordalen Abstand von z_1 und z_2. [1]

4. Wir betrachten komplexe Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$ und die Möbiustransformation [3]

$$z \mapsto f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Zeige, daß es komplexe Zahlen $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ und $\tilde{d}$ gibt mit $\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c} = 1$, so daß für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$f(z) = \frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}}$$

5. **Bestimme** eine Möbiustransformation f so daß $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$ und $f(0) = i$. **Stelle** nun die Möbiustransformationen $g := f \circ f$ und $h := f^{-1}$ in folgender Form dar: [4]

$$\frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 2

6. (Möbiustransformationen und Doppelverhältnis)

(a) **Bestimme** eine Möbiustransformation f mit $f(1) = i$, $f(i) = -1$ und $f(-1) = -i$ sowie die Menge $M_1 := \{f(z) : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. [2]

(b) **Bestimme** nun mit Hilfe des Doppelverhältnisses eine Möbiustransformation g mit den Fixpunkten i und $-i$ und mit $g(1) = 0$. Wie sieht $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(g(z)) < 0\}$ aus? [2]

(c) **Bestimme** den Mittelpunkt sowie den Radius des Kreises welcher durch die Punkte $z_1 = i$, $z_2 = 1+i$ und $z_3 = 2$ geht. [2]

(d) **Bestimme** die Menge M_3 aller $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z+2|$. [2]

7. (Komplexe Differenzierbarkeit) [2]

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) := \begin{cases} e^{-1/|z|} & \text{falls } z \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, daß f im Punkt $z_0 = 0$ (komplex) differenzierbar ist.

8. Zeige mit Hilfe der Definition 2.2.1 daß für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: [1]

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

9. (a) **Bestimme** alle $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = 1$. [1]

(b) **Bestimme** alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = 1$. [1]

(c) **Zeige:** Für $q \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $z^q = 1$ *genau* q verschiedene Lösungen. [3]

(d) Wir betrachten den Hauptzweig von $\log(z)$ mit $-\pi < \arg(z) < \pi$ und die Funktion $f : z \mapsto z^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$. **Berechne** auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ die Ableitung von f. [3]

10. (Die Gamma-Funktion) Skizziere mit Maple den Betrag der Gammafunktion auf der Menge [3]

$$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \in (1/2, 3), \mathrm{Im}(z) \in (-1, 1)\}$$

sowie die Menge $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-5,2), y = \Gamma(x) \in (-5,5)\right\}$.
Hinweis: Für Sinus könnte die Lösung einer ähnlichen Aufgabe wie folgt aussehen:

```
> with(plots):
> plot3d(abs(sin(x+I*y),x=-1..1,y=-1..1);
> plot(sin(x),x=-5..2,y=-0.5..0.5);
```

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Dr. Markus Biegert
WS 2005/06

Abgabetermin: Fr, 11.11.2005

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 3

11. Für welche der folgenden Paare u und v sind die Cauchy-Riemannschen Dgln. auf Ω erfüllt?

(a) $\Omega := \mathbb{R}^2$, $u(x,y) := e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ und $v(x,y) := e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$. [1]

(b) $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $u(x,y) := (x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$ und $v(x,y) := -2xy/(x^2+y^2)^2$. [1]

(c) $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $u(x,y) := (x^2+y^2)/(x^2+y^2)^2$ und $v(x,y) := 2xy/(x^2+y^2)^2$. [1]

12. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, also eine auf Ω holomorphe Funktion.

(a) **Zeige:** Ist $\operatorname{Re}(f)$ konstant auf Ω, dann ist auch f konstant auf Ω. [1]

(b) **Zeige:** Ist $|f|$ konstant auf Ω, dann ist auch f konstant auf Ω. [1]

(c) **Zeige:** Ist $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \Omega$, dann ist $f \equiv c \in \mathbb{R}$. [1]

13. **Bestimme** zu $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u(x,y) := 3x^2y - y^3$ alle Funktionen $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so daß $f(z) := u(x,y) + iv(x,y)$ eine ganze Funktion ist. [2]

14. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ aus Aufgabe 2, Blatt 2. **Zeige**, daß f im Ursprung $z_0 = 0$ nicht holomorph ist. [1]

15. **Skizziere** mit Maple den geschlossenen Weg γ gegeben durch die Parameterdarstellung [2]

$$z(t) := \cos(t)\,[20-(4\pi-t)t] + i\sin(t)\,[(20-(4\pi-t)t], \quad t \in [0,4\pi].$$

Bestimme den Index von γ auf jeder Zusammenhangskomponente des Komplementes von $\gamma^\star$. [3]

16. **Berechne** das Kurvenintegral [1]

$$\int_\gamma e^{z^2}\,dz$$

mit dem Weg γ aus Aufgabe 15.

17. Wir betrachten die Wege γ_1 und γ_2 gegeben durch die Parameterdarstellungen $z_1(t) := \cos(t) + i\sin(t)$, $t \in [0,\pi]$ und $z_2(t) := \cos(t) + i\sin(t)$, $t \in [\pi, 2\pi]$. **Berechne** nun die Kurvenintegrale [5]

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz, \quad \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz$$

für

(a) $f(z) := z$. (b) $f(z) := 1$. (c) $f(z) := z^{-1}$. (d) $f(z) := z^{-2}$.

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/hme3

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Dr. Markus Biegert
WS 2005/06

Abgabetermin: Fr, 18.11.2005

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 4

18. Bestimme die Potenzreihenentwicklung um den Nullpunkt von [2]

(a) $(1+z^2)^{-1}$. (b) $\arctan(z)$.

19. (Eindeutigkeit der holomorphen Fortsetzung)
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet welches das Intervall $I := (0,\infty)$ enthält. Wir sagen: Eine auf I definierte Funktion f besitzt eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{f}$ in G, falls $\tilde{f}$ in G holomorph ist und $\tilde{f}|_I = f$. **Zeige**, daß es zu jeder Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ höchstens eine holomorphe Fortsetzung in G gibt. [1]

20. Zeige: Sind f und g holomorph in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und ist $z_0 \in G$, so daß $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \geq k_0 \in \mathbb{N}$, so gibt es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ vom Grade $\leq k_0 - 1$, so daß $f = g + p$ in G. [2]

21. (Satz von Liouville verschärft) [2]
Sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ eine ganze Funktion, so daß $\mathrm{Re}(f)$ beschränkt ist. **Zeige**, daß f konstant ist.

22. (Nullstellen holomorpher Funktionen)
Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $\varphi \in \mathscr{H}(\Omega)$ eine auf Ω holomorphe Funktion und ist $z_0 \in \Omega$, dann bezeichnen wir mit $\mathrm{Ord}(\varphi, z_0) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ die Ordnung der Nullstelle z_0 bezüglich φ.
Seien $f, g \in \mathscr{H}(\Omega)$ holomorphe Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ und sei $z_0 \in \Omega$. Desweiteren sei $h \in \mathscr{H}(O)$ eine auf einer offenen Menge $O \supset g(\Omega)$ holomorphe Funktion. Zeige folgende Aussagen:

(a) $\mathrm{Ord}(f+g, z_0) \geq \min\{\mathrm{Ord}(f, z_0), \mathrm{Ord}(g, z_0)\}$. [1]

(b) $\mathrm{Ord}(f+g, z_0) = \min\{\mathrm{Ord}(f, z_0), \mathrm{Ord}(g, z_0)\}$, falls $\mathrm{Ord}(f, z_0) \neq \mathrm{Ord}(g, z_0)$. [1]

(c) $\mathrm{Ord}(f \cdot g, z_0) = \mathrm{Ord}(f, z_0) + \mathrm{Ord}(g, z_0)$. [2]

(d) $\mathrm{Ord}(h \circ g, z_0) = \mathrm{Ord}(h, g(z_0)) \cdot \mathrm{Ord}(g - g(z_0), z_0)$. (wobei hier $0 \cdot \infty := \infty \cdot 0 := 0$ gesetzt ist) [2]

23. Bestimme $\mathrm{Ord}(f, i)$ für $f(z) = \sin\big((1+z^2)^2\big)$. [1]

24. (Hebbarkeit von Singularitäten)
Bestimme die Lage der isolierten Singularitäten und **untersuche** diese auf Hebbarkeit: [4]

(a) $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ (b) $\frac{\sin(z)}{z}$ (c) $\frac{\cos(z)-1}{z}$ (d) $\frac{z^2+i}{z^4+1}$

25. Berechne folgendes Kurvenintegral von Hand <u>und</u> mit Hilfe von Maple: [2]

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z}\, dz.$$

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/hme3

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Dr. Markus Biegert
WS 2005/06

Abgabetermin: Fr, 25.11.2005

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 5

26. (Mittelwertformel und Maximumprinzip) [3]
Sei $f \in \mathscr{H}(K(z_0,R))$ mit $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 < r < R$. *Zeige* mit Hilfe der Cauchy-Integralformel folgende **Mittelwertformel**

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt$$

und benutze dies um folgende Variante des **Maximumprinzips** zu zeigen:

$$|f(z_0)| \leq \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

27. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ und $f(z) \in D := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}\ \forall z \in \Omega$, so ist $f \equiv C$. [1]

28. (Cauchy-Gebiete und Stammfunktionen)
Entscheide ob die Funktion f auf Ω eine Stammfunktion besitzt.

(a) Für $f(z) := (z^2+z+1)/(z^2-3z+2)$ und $\Omega := K(0,1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. [1]

(b) Für $f(z) := 1/z$ und $\Omega := K(0,0,1) := K(0,1) \setminus \{0\}$. [1]

(c) Für $f(z) := \cos(\pi z/2)/(z-1)$ und $\Omega := K(1,0,1) := K(1,1) \setminus \{1\}$. [1]

(d) Für $f(z) := [(z^2-2z+1)(z^2-4z+4)]^{-1}$ und $\Omega := K(1,0,1) = K(1,1) \setminus \{1\}$. [2]

29. (Klassifikation von Singularitäten) [2]
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $z_0 \in \Omega$ und $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Ist z_0 ein Pol k-ter Ordnung von f, so setzen wir $\mathrm{Ord}(f,z_0) := -k$ und ist z_0 eine wesentliche Singularität von f, so setzen wir $\mathrm{Ord}(f,z_0) := -\infty$. Nach Satz 4.2.5 können wir f in eine Laurentreihe in $K(z_0,0,r) \subset \Omega$ mit $r := \mathrm{dist}(z_0,\Omega^c) > 0$ entwickeln. Diese sei gegeben durch

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k.$$

Zeige, daß $\mathrm{Ord}(f,z_0) = \inf\{k \in \mathbb{Z} : a_k \neq 0\}$. $(\inf \emptyset = \infty)$

30. (Laurentreihen)

(a) *Bestimme* alle möglichen Laurentreihenentwicklungen der Funktion $f(z) := 1/[z^2-2z]$ um die folgenden Entwicklungspunkte: [5]

(i) Um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. (2 Gebiete)

(ii) Um den Entwicklungspunkt $z_0 = 4$. (3 Gebiete)

(b) *Entwickle* $f(z) := 1/(z+2i)^2$ in eine Laurentreihe die in $K(0,2,\infty)$ konvergiert. [2]

31. Berechne mit Maple das Kurvenintegral $\int_{|z|=1} f(z)\, dz$ für f aus Aufgabe (28d) und (30a). [2]

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/hme3

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 6

32. Residuen-Berechnung:

(a) *Bestimme* $\mathrm{Res}_1(f)$ für $f(z) := \cos(z\pi/2)(z-1)^{-1}$. [1]

(b) *Bestimme* $\mathrm{Res}_0(\cot)$ wobei $\cot(z) := \cos(z)/\sin(z)$. [1]

(c) *Bestimme* $\mathrm{Res}_{\pi/4}(f)$ für $f(z) := \sin(z)(z-\pi/4)^{-2}$. [2]

(d) *Bestimme* $\mathrm{Res}_0(f)$ und $\mathrm{Res}_1(f)$ für $f(z) := z^{-1} + (z-1)^{-2}$. [1]

(e) *Bestimme* die Polstellen z_1, z_2, z_3 von $f(z) := (1+z^4)/(1+z^3)$ und $\mathrm{Res}_{z_k}(f)$, $k = 1,2,3$. [3]

33. Integralberechnung mit Hilfe des Residuensatzes

(a) *Berechne* das uneigentliche Riemann-Integral [2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx.$$

(b) *Berechne* die uneigentlichen Riemann-Integrale [4]

$$\text{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{(1+x^2)^2}\,dx \quad \text{und} \quad \text{(ii)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$$

(c) *Berechne* das komplexe Kurvenintegral [1]

$$\int_{|z-\pi/2|=1} \frac{\sin(z)}{(z-\pi/2)^2}\,dz.$$

(d) *Berechne* folgende Integrale vom Typ $\int_0^\infty f(x)\,dx$ mit $f(x) = f(-x)$. [4]

$$\text{(i)} \int_0^\infty \frac{1}{2+x^2}\,dx. \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty \frac{x^2-2}{x^4+5x^2+4}\,dx$$

---

34. (Umschreiben einer DGL n-ter Ordnung in ein DGLS erster Ordnung) [1]
Wir betrachten folgende explizite Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\eta^{(3)} = 6\eta^{(2)} - 11\eta' + 6\eta.$$

Schreibe diese DGL in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung um.

35. (Beispiel zur Nicht-Eindeutigkeit von Lösungen) [2]
Bestimme zwei verschiedene Lösungen x_1 und x_2 auf $\mathbb{R}$ des folgenden AWP:

$$\begin{cases} x' = (3x^2)^{1/3} \\ x(5) = 3. \end{cases}$$

Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Picard-Lindelöf ?

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 7

36. (Die exakte Differentialgleichung)
Prüfe welche der folgenden DGLn exakt sind und *bestimme* ggf. dazu eine Stammfunktion.

(a) $2tx^2 + (2t^2+2)x' = 0$. [1]

(b) $10x^3t + (15t^2x^2)x' = 0$. [1]

(c) $\cos(t)\cos(x) - \sin(t)\sin(x)x' = 0$. [1]

37. (Lineare Differentialgleichung erster Ordnung)
Bestimme die Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der folgenden Anfangswertaufgaben.

(a) $x_1' = 2x_1 + 4$, $x_1(0) = 1$. [1]

(b) $x_2' = 2x_2 + 4t$, $x_2(0) = 1$. [1]

(c) $x_3' = 2x_3 + 4t + 4$, $x_3(0) = 2$. [1]

38. (Eine Riccatische Differentialgleichung) [3]
Löse die Riccatische DGL analog zum Beispiel aus der Vorlesung.

$$x' = x - x^2 + t^2 - t - 1.$$

39. (Homogene lineare Systeme und Wronski-Determinante)
Wir betrachten die Abbildung $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$X(t) := e^{2t}\begin{pmatrix} 0 & 1 & t \\ 1 & t & 1+t^2/2 \\ -1 & 1-t & t-t^2/2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Zeige*, daß die Spalten von X Lösungen des folgenden homogenen linearen DGLS sind: [3]

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} x(t) = Ax(t). \qquad (1)$$

(b) *Zeige*, daß X eine Fundamentalmatrix des homogenen linearen DGLS (1) ist, d.h. daß die Spalten von X ein Fundamentalsystem bilden. [1]

(c) *Berechne* die eindeutige Lösung des AWP [2]

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(1) = (1,1,1)^T.$$

(d) *Berechne* $w(t) := \det X(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. [1]

Bitte wenden !

40. (Dreieckig geblockte und inhomogene lineare Systeme)
Wir betrachten folgendes DGLS

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3t^2 - 1 \\ 0 & 3t^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Berechne* eine dazugehörige Fundamentalmatrix X. [2]

(b) *Berechne* die Lösung des AWP: $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$, $x(0) = 0$. [2]

41. Löse mit Hilfe von Maple das AWP aus Aufgabe (39c). [2]
Hinweis:

```
> dsolve( ?? );
```

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/hme3

Prof. Dr. W. Balser
Dr. Markus Biegert
WS 2005/06

Gesamt: 20 Punkte

Abgabetermin: Fr, 16.12.2005

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 8

42. (Reduktion der Ordnung, Wronski-Determinante, Lineare DGL höherer Ordnung) [4]

Wir betrachten die homogene lineare DGL zweiter Ordnung

$$x''(t) + \frac{1}{t}x'(t) - \frac{1}{t^2}x(t) = x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0; \qquad t > 0.$$

Wir sehen, daß $x_1(t) := t$ eine Lösung der DGL ist. *Bestimme* nun eine zweite Lösung x_2, so daß

$$w(t) := \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall t > 0.$$

<u>Hinweis:</u> Ist x_2 eine Lösung so gilt nach Proposition 7.5.4:

$$w(t) = w(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(\tau)/a_n(\tau)\, d\tau \right).$$

Benutze diese Formel um x_2 zu berechnen !

43. (Die Matrix-Exponentialfunktion)

(a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ so daß $A^2 = -I$, wobei I die Einheitsmatrix ist. *Zeige*, daß [1]

$$e^{tA} = \cos(t)I + \sin(t)A \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ so daß $A^2 = I$, wobei I die Einheitsmatrix ist. *Zeige*, daß [1]

$$e^{tA} = \cosh(t)I + \sinh(t)A \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(c) Wir betrachten die Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gegeben durch [1]

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := e^A.$$

Berechne die Inverse von B.

(d) *Berechne* e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch [2]

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Hinweis:</u> Was ist A^2 und A^3 ?

(e) *Berechne* e^{tA} für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch [2]

$$A := \begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 \\ -5 & 15 & -55 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

44. (Lösen eines linearen homogenen DGLS mit Anfangswert) [1]

Berechne die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = Ax, \quad x(0) = x_0 = (1, 1, -1)^t.$$

45. *Berechne* die Lösung $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ der folgenden Anfangswertaufgabe: [2]

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

46. *Finde* eine Lösung $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ des folgenden DGLS: [3]

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2t\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Verwende dabei Aufgabe 8.2.5 der Vorlesung.

47. (Lösen eines linearen inhomogenen DGLS mit konstanten Koeffizienten) [3]
Sei $p(t)=\sum_{j=0}^m t^j p_j$ ein Polynom mit Vektorkoeffizienten $p_j\in\mathbb{R}^n$ und sei $i\lambda$ kein Eigenwert von $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$.
Finde eine Lösung von

$$x' = Ax + \cos(\lambda t)p(t)$$

in der Form $x(t)=\cos(\lambda t)\sum_{j=0}^m t^j a_j + \sin(\lambda t)\sum_{j=0}^m t^j b_j$ mit $a_j, b_j\in\mathbb{R}^n$.

Hinweis: Vergleiche dazu Aufgabe 8.2.5 der Vorlesung.

Satz 1 *Sei $p(t)=\sum_{j=0}^m p_j t^j$ ein Polynom mit Koeffizienten $p_j\in\mathbb{C}^n$ und sei λ kein Eigenwert von A. Dann ist eine Lösung x von $x' = Ax + e^{\lambda t}p(t)$ gegeben durch*

$$x(t) = e^{\lambda t}\sum_{j=0}^m t^j x_j,$$

wobei $x_m := (\lambda - A)^{-1}p_m$ und $x_j := (\lambda - A)^{-1}\left[p_j - (j+1)x_{j+1}\right]$ für $j = 0,\dots,m-1$.

Beweis: Durch Differenzieren erhalten wir

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \lambda x(t) + e^{\lambda t}\sum_{j=0}^{m-1} t^j x_{j+1}(j+1) \overset{!}{=} Ax(t) + e^{\lambda t}p(t) \quad \Leftrightarrow \\
(\lambda - A)x(t) &= e^{\lambda t}\left[\sum_{j=0}^{m-1} t^j\left\{p_j - x_{j+1}(j+1)\right\} + t^m p_m\right] \quad \Leftrightarrow \\
e^{\lambda t}\sum_{j=0}^m t^j x_j &= e^{\lambda t}\left[\sum_{j=0}^{m-1} t^j(\lambda - A)^{-1}\left\{p_j - x_{j+1}(j+1)\right\} + t^m(\lambda - A)^{-1}p_m\right].
\end{aligned}$$

Letzteres ist erfüllt genau dann wenn $x_m = (\lambda - A)p_m$ und $x_j = (\lambda - A)^{-1}(p_j - x_{j+1}(j+1))$.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Abgabetermin: Fr, 13.01.2006

Prof. Dr. W. Balser
Dr. Markus Biegert
WS 2005/06

Gesamt: 26 Punkte

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 9

48. (Gleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten)
Bestimme ein reelles Fundamentalsystem der folgenden Diffentialgleichungen:

(a) $x^{(3)} - 2x^{(2)} - x' + 2x = 0.$ [1]

(b) $x^{(3)} - 4x^{(2)} + 5x' - 2x = 0.$ [1]

(c) $x^{(3)} - 3x^{(2)} + x' - 3x = 0.$ [1]

49. *Berechne* die Lösung des folgenden Anfangswertproblems: [2]

$$x''(t) - 3x'(t) - 4x(t) = 4t, \qquad x(0) = 3/4,\ x'(0) = -1.$$

50. (Schwingungsgleichung) [2]
Berechne die Lösung der Schwingungsgleichung

$$mx'' + rx' + kx = 0, \qquad m,k > 0, r \geq 0$$

zu den Anfangswerten $x(0) = 0$ und $x'(0) = 1$.

51. *Berechne* eine Lösung der Differentialgleichung [2]

$$x''' + x'' + x' + x = 8e^t + 8te^t.$$

<u>Hinweis:</u> Benutze Aufgabe 8.4.1 der Vorlesung.

52. (Inhomogene Schwingungsgleichung)
Wir betrachten die inhomogene Schwingungsgleichung

$$mx'' + rx' + kx = A\cos(wt), \qquad m,r,k,w,A > 0.$$

Dann gibt es nach Aufgabe 8.4.3 der Vorlesung Konstanten $B, \phi > 0$ so daß $x(t) = B\cos(wt - \phi)$ eine Lösung ist.

(a) *Bestimme* nun die Konstante $B = B(m,r,k,w,A)$. [1]

(b) *Bestimme* den Grenzwert $\lim_{r\to 0+} B(m,r,k,\sqrt{k/m},A)$. [1]

53. (Lösen linearer DGLen mit Hilfe der Laplace-Transformation)

(a) Berechne die Laplacetransformation $\mathscr{L} f$ für $f(t) := \cosh(t)$. [2]

(b) Löse mit Hilfe der Laplacetransformation folgendes AWP: [3]

$$x'''(t) - 6x''(t) + 11x'(t) - 6x(t) = -12e^{-t}, \quad x(0) = x''(0) = 1 \text{ und } x'(0) = 0.$$

54. (Lösen von linearen DGLen mit Hilfe des Potenzreihenansatzes)

(a) *Löse* folgendes AWP mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes (vgl. Satz 9.1.1): [3]

$$x''(t) - 3t^2x'(t) - 6tx(t) = 0, \qquad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$$

(b) *Löse* folgendes AWP mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes (vgl. Satz 9.1.1): [3]

$$(1+t)x'''(t) - x''(t) + (1+t)x'(t) - x(t) = 0, \qquad x(0) = 1,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = 0.$$

55. (Lösen von verschiedenen Typen von linearen DGLen)

(a) *Löse* folgende Eulersche Differentialgleichung mit Anfangswert: [2]

$$t^2x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = 0, \qquad x(1) = 2,\ x'(1) = 3.$$

(b) *Löse* das folgende Anfangswertproblem: [2]

$$(1-t^2)x''(t) - 2tx'(t) + 4(4+1)x(t) = 0, \qquad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$$

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Dr. Markus Biegert
WS 2005/06

Abgabetermin: Fr, 20.01.2006

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 10

56. (Asymptotisches Verhalten)
Wir betrachten folgendes Anfangswertproblem:

$$x' = x + \sin(t)\cos(x)/2, \qquad x(0) = 1.$$

(a) *Begründe* warum es genau eine Lösung $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gibt. [3]

(b) *Zeige* mit Hilfe von Satz 10.1.2 daß es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für die Lösung x des obigen AWP gilt: [2]

$$|x(t)| \leq Ce^t \qquad \forall t \geq 0.$$

57. (Stabilität eines Systems) [3]
Untersuche das System

$$\begin{aligned} x_1' &= -3x_1 - 2x_2 + x_1x_2 + x_2x_3 \\ x_2' &= 2x_1 + x_2 + x_1x_2 + x_2x_3 \\ x_3' &= x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + \alpha x_3 \end{aligned}$$

für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf Stabilität der Nulllösung.

58. (Stabilität der Schwingungsgleichung)
Wir betrachten für $m, k > 0$ und $r \geq 0$ die Schwingungsgleichung

$$mx'' + rx' + kx = 0.$$

(a) *Zeige* mit einem Satz aus 10.2 die asymptotische Stabilität der Nulllösung für $r > 0$. [2]

(b) *Begründe* warum für $r = 0$ die Nulllösung nicht asymptotisch stabil ist. [1]

59. (Runge-Kutta-Verfahren) Wir betrachten das Anfangswertproblem [3]

$$x' = x, \quad x(0) = 1.$$

Berechne für $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$ und $h = t/n$ nach dem Runge-Kutta-Verfahren die Werte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ und *zeige*, daß

$$\lim_{n\to\infty} x_n = e^t$$

Hinweis: $\exp(t) = \lim_n (1 + t/n)^n$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

60. (Testfunktionen) [1]
Finde eine nicht-konstante und konvergente Folge in dem Raum der Testfunktionen $\mathscr{D}$.

61. (Distributionen) Wir definieren die Abbildung $T : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ durch [2]

$$T(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi(t) + \varphi''(t)\right] \, dt + \varphi'(0).$$

Zeige, daß T eine Distribution ist.

62. (Approximation der Delta-Distribution) [3]

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative stetige Funktion mit kompaktem Träger, so daß $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1$. Dann definieren wir eine Funktionenfolge $f_n(t) := n f(nt)$. Die zu f_n assoziierte Distribution bezeichnen wir mit F_n, also

$$F_n(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\varphi(t)\, dt.$$

Zeige, daß für alle $\varphi \in \mathscr{D}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\varphi) = \delta(\varphi) = \varphi(0).$$

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Dr. Markus Biegert
WS 2005/06

Gesamt: 20 Punkte

Abgabetermin: Fr, 27.01.2006

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 11

63. (Distribution $\leftrightarrow$ Funktion) [1]
Wie in der Vorlesung gesagt (Seite 78) legt eine lokal integrierbare Funktion immer eine reguläre Distribution fest. *Finde* nun zwei verschiedene lokal integrierbare Funktionen welche die gleiche Distribution festlegen.

64. (Distributionelle Ableitungen)
Wir betrachten die lokal integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := |x| + \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 2. \\ 0 & \text{falls } x \le 2. \end{cases}$$

und die durch f festgelegte Distribution F.

(a) *Berechne* die erste Ableitung von F, also F'. [2]

(b) *Berechne* die zweite Ableitung von F, also F''. [2]

65. (Konvergenz von Distributionen)
Wir betrachten stetige Funktion $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und dazugehörige Distributionen F_n und F.

(a) *Zeige*: Konvergiert f_n glm. gegen f, so konvergiert F_n gegen F. [1]

(b) *Zeige*: Konvergiert $\int_{-\infty}^{\infty} |f_n - f|\, dt$ gegen 0, so konvergiert F_n gegen F. [1]

(c) *Zeige oder widerlege:* Konvergiert F_n gegen F, so konvergiert f_n punktweise gegen f. [1]

66. (Fourierreihen von Distributionen) [3]
Nach Satz 11.7.1 der Vorlesung konvergiert die Fourierreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k \sin(kt)$$

im Raum der Distributionen gegen eine Distribution T. Bestimme nun die Distribution T.

Hinweis: Was ist die Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion $f(t) = t$, $-\pi < t < \pi$?
(Siehe Beispiel 8.3.9 der Vorlesung HME2).

67. (Grundlösung der Poissongleichung) [3]
Wir betrachten die Funktion $u : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u(x) := \frac{1}{|x|}.$$

Berechnen nun $\Delta u(x)$ im klassischen Sinne für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

68. (Lineare partielle DGL erster Ordnung: Mit Anleitung)
Wir suchen zu folgender partieller DGL erster Ordnung

$$u_x + b u_y + cu = 0 \qquad \text{mit } b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

die allgemeine Lösung. Dazu setzen wir $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ und $U(\xi,\eta) = u(x,y)$.

(a) Wie lautet die entsprechende DGL für U bzgl. ξ und η? (Vgl. Abschnitt 12.2) [1/2]

(b) *Bestimme* eine nicht-triviale Charakteristik $(x(t), y(t))$ der DGL $\xi_x + b\xi_y = 0$. [1/2]

(c) *Bestimme* eine Lösung ξ der DGL in (b) ist. [1/2]

(d) *Bestimme* nun η so, daß $(x,y) \mapsto (\xi(x,y), \eta(x,y))$ ein Diffeomorphismus ist. [1/2]

(e) *Bestimme* die allgemeine Lösung der DGL in (a) mit ξ aus (c) und η aus (d) [1/2]

(f) *Bestimme* die allgemeine Lösung der ursprünglichen partiellen DGL erster Ordnung. [1/2]

69. (Lineare partielle DGL erster Ordnung: Ohne Anleitung) [3]

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL

$$2yu_x - u_y + u = 0.$$

Übungen zu HM3 für Elektrotechniker

Blatt : 12

70. (Wärmeleitungsgleichung mit Neumann Randbedingungen) [7]

Bestimme, mit Hilfe eines geeigneten Separationsansatzes, eine auf $[0,\infty) \times [0,\pi]$ stetige Funktion welche folgende partielle DGL mit Randbedingung löst:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & t > 0, x \in (0,\pi) \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

wobei $u_0 \in C^1([0,\pi])$ mit $u_0'(0) = u_0'(\pi) = 0$ gegeben sei, z.B. $u_0(x) = x^3 - 3\pi x^2/2$.

71. (Das Dirichlet-Problem im Kreisring) [7]

Wir betrachten den Kreisring $R := K(0,\rho,1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \rho < |(x,y)| < 1\right\}$ mit $\rho \in (0,1)$ und hinreichend schöne Funktionen f_1 und f_2. Bestimme (analog zur Vorlesung für die Kreisscheibe) mit Hilfe von Polarkoordianten und einem geeigneten Separations-ansatz eine Funktion $u \in C(\overline{R})$ so daß

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & (x,y) \in R. \\ u(x,y) = f_1(x,y) & |(x,y)| = 1. \\ u(x,y) = f_2(x,y) & |(x,y)| = \rho. \end{cases}$$

72. (Das schwingende Quadrat) [7]

Wir betrachten das Quadrat $Q := (0,\pi)^2 \subset \mathbb{R}^2$ und Funktionen $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathscr{D}(0,\pi)$. Bestimme mit Hilfe eines geeigneten Separationsansatzes eine Funktion $u = u(t,x,y) \in C([0,\infty) \times \overline{Q})$ so daß

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} & (x,y) \in Q,\ t \geq 0. \\ u(t,x,y) = 0 & (x,y) \in \partial Q. \\ u(0,x,y) = f_1(x) f_2(y) & (x,y) \in Q. \\ u_t(0,x,y) = g_1(x) g_2(y) & (x,y) \in Q. \end{cases}$$

Prof. Dr. W. Balser
Dr. Markus Biegert
WS 2005/06

Gesamt: 150 Punkte

Scheinklausur zur Vorlesung HME3 - Deckblatt

Scheinklausur : 1

Es sind insgesamt 150 Punkte zu erreichen.
Erlaubte Hilfsmittel: Drei handbeschriebene DIN A4 Seiten.

Name:	
Matrikelnummer:	

Aufgabe	Max. Punktzahl	Erreichte Punkte	Unterschrift
1.	4		
2.	5		
3.	5		
4.	8		
5.	18		
6.	12		
7.	3		
8.	6		
9.	9		
10.	24		
11.	9		
12.	8		
13.	6		
14.	4		
15.	4		
16.	10		
17.	15		
Gesamt	150		

Zu Aufgabe 17

Frage	richtig	falsch
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Dr. Markus Biegert
WS 2005/06

Gesamt: 150 Punkte

Scheinklausur zur Vorlesung HME3 - Aufgabenblatt

Scheinklausur : 1

1. *Bestimme* die Menge der $z \in \mathbb{C}$ mit $z^5 = i$. [4]

2. *Bestimme* Mittelpunkt und Radius des Kreises welcher durch folgende Punkte geht: [5]

$$z_1 = -1, \quad z_2 = i - 1, \quad \text{und} \quad z_3 = 2i.$$

3. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die harmonische Funktion $u(x,y) := \cosh(x)\cos(y)$. *Bestimme* eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so daß $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine ganze Funktion ist. [5]

4. *Bestimme* Lage und Art der isolierten Singularitäten. [8]

$$\text{(a)} \ \frac{z}{(z-1)\sin(\pi z)}, \qquad \text{(b)} \ \exp\left(\frac{-1}{z^2}\right).$$

5. *Berechne* folgende komplexe Kurvenintegrale. [18]

$$\text{(a)} \oint\limits_{|z|=4} \frac{1}{\sin(z)}\,dz, \qquad \text{(b)} \oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin(z)}{z^2+2z+1}\,dz, \qquad \text{(c)} \oint\limits_{|z-5|=2} \frac{2z-6}{z^2-6z+8}\,dz.$$

6. *Bestimme* alle Laurentreihenentwicklungen folgender Funktionen um den Nullpunkt. [12]

$$\text{(a)} \ \frac{1}{z^2-2z+1}, \qquad \text{(b)} \ \frac{2z-2}{z^2-4z+3}, \qquad \text{(c)} \ \sum_{k=0}^{3}(z-1)^k.$$

7. *Zeige*: Sind f und g ganze Funktionen, $|f(z)| \le |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und ist $g(z) \neq 0$ für alle $z \in \overline{K(0,1)}$, so ist $|f(z)| \le |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le 1$. [3]

8. *Berechne* folgendes uneigentliches Riemann-Integral. [6]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{(1+x^2)(4+x^2)(9+x^2)}\,dx.$$

9. *Überprüfe* welche der folgenden DGLen exakt sind und *bestimme* gegebenenfalls dazu eine dazugehörige Stammfunktion. [9]

(a) $(2t+2x) + (2t+2x)x' = 0$.

(b) $\cos(t)\cos(x) - \sin(t)\sin(x)x' = 0$.

(c) $(2tx^2) + (t^2x)x' = 0$.

10. *Löse* folgende Anfangswertprobleme. [24]

$$\text{(a)} \ \begin{cases} x'' - x' - 6x = 6t + 1, \\ x(0) = -1,\ x'(0) = -24. \end{cases} \qquad \text{(b)} \ \begin{cases} x_1' = -23x_1 - 30x_2, \\ x_2' = 20x_1 + 26x_2, \\ x_1(0) = 1;\ x_2(0) = 2; \end{cases}$$

$$\text{(c)} \ \begin{cases} x' = 2t[(1+t^2)/x]^2, \\ x(0) = 1. \end{cases} \qquad \text{(d)} \ \begin{cases} x + tx' - x'' = 0, \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Hinweis: In Teilaufgabe (d) kann ein Potenzreihenansatz hilfreich sein.

11. Untersuche folgendes System auf Stabilität und asymptotische Stabilität der Lösung $x(t)$ gegeben durch $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^t \equiv (1,1,1)^t$. [9]

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + 2x_2 - 5x_1x_2x_3 + 5x_3 - 5, \\ x_2' &= 2x_1 + x_2 - 3x_1x_2x_3 + 3x_3 - 3, \\ x_3' &= x_1x_3^2 - x_2x_3^2 - 3x_3^2 - x_1 + x_2 + 3x_3. \end{aligned}$$

12. Wir betrachten folgende homogene lineare DGL zweiter Ordnung [8]

$$x''(t) - \frac{1}{t}x'(t) - 4t^2x(t) = 0, \qquad t > 0.$$

Wir sehen, daß $x_1(t) = \exp(t^2)$ eine Lösung dieser DGL ist. *Bestimme* nun eine weitere linear unabhängige Lösung x_2 dieser DGL.

13. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) := \max\{\sin(t), 0\}$ und die dazu assoziierte Distribution T_f. *Berechne* nun die zweite Ableitung von T_f. [6]

14. Sei eine Folge von Distributionen $T_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})'$. *Zeige:* Konvergiert die Folge $(T_n)_n$ im Distributionenraum gegen eine Distribution T, so konvergiert auch $(T_n')_n$ gegen T'. [4]

15. *Berechne* die allgemeine Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folgender partieller Differentialgleichung. [4]

$$4u_x + 5u_y + 6u = 0.$$

16. *Berechne* mit Hilfe eines geeigneten Separationsansatzes die Lösung $u \in C([0,\infty) \times \overline{Q})$ des folgenden Problems, wobei $Q := (0,\pi)^2 \subset \mathbb{R}^2$ sei. [10]

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, & (x,y) \in Q, \quad \text{(Wellengleichung)} \\ u(t,x,y) = 0, & (x,y) \in \partial Q, \quad \text{(Randbedingungen)} \\ u(0,x,y) = \sin(x)\sin(y), & (x,y) \in Q, \quad \text{(Anfangsposition)} \\ u_t(0,x,y) = \sin(x)\sin(y), & (x,y) \in Q \quad \text{(Anfangsgeschwindigkeit).} \end{cases}$$

17. Kreuze auf dem Beiblatt an, ob Du folgende Aussagen für richtig oder falsch hältst. Wenn Du nicht sicher bist, kannst Du raten oder keine Antwort ankreuzen. Für jedes richtig platzierte Kreuz erhältst Du $1,5$ Punkte, für ein falsches Kreuz werden $1,5$ Punkte abgezogen. Bei negativem Punktesaldo werden für diese Aufgabe null Punkte vergeben. [15]

1. Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und f eine auf Ω holomorphe Funktion, so daß $\mathrm{Re}(f)$ konstant auf Ω ist, dann ist sogar f auf Ω konstant.
2. Hat $f \in \mathscr{H}(K(0,2) \setminus \{0\})$ in 0 einen Pol dritter Ordnung, so hat $1/f$ in 0 eine Nullstelle dritter Ordnung.
3. Ist f auf $K(0,2) \setminus \{0\}$ holomorph und hat f einen Pol in $z_0 = 0$ so gilt:
$$\int_{|z|=1} f(z)\, dz \neq 0.$$
4. Es gibt eine ganze Funktion welche die Einheitskreisscheibe $K(0,1)$ in die reelle Achse abbildet.
5. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion, so hat das Anfangswertproblem $x'(t) = f(x(t))$, $x(1) = 2$ nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine lokal eindeutige Lösung.
6. Für $a,b,c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat die DGL $ax'' + bx' + cx = 0$ drei linear unabhängige Lsgen.
7. Die Nulllösung der DGL $x' = 4x$ ist asymptotisch stabil.
8. Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so gilt die Formel $e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB}$.
9. Sind $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $Av = v$, so gilt $e^{tA}v = e^t v$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
10. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und stetige Funktion, so existiert die Laplace-Transformation auf der Halbebene $\mathbb{C}_+ = \{x + iy \in \mathbb{C} : x > 0, y \in \mathbb{R}\}$.