Übungen zu ODE
Sommersemester 2005.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Forst
Markus Biegert
SS 2005

Gesamt: 16 Punkte

Abgabetermin: Di, 19.04.2005

Übungen zu DGLen für Lehramtskandidaten

Blatt : 1

1. Schreibe folgende implizit gegebene Differentialgleichungen in *explizite* DGLen um. [6]

(a) $y' + 2y + 3y^2 = 0$.

(b) $F(x,y,y',y'') = 0$ wobei $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$.

2. Skizziere für $x \in J = [0,4]$, mit Hilfe des *Euler-Polygonzugverfahrens*, eine Näherungs-lösung der folgenden AWA (=**A**nfgangs**W**ert**A**ufgabe): [4]

$$y' = y/8 + x/4,\ y(0) = 0;$$

Hier kannst Du die Schrittweite $h = 1/2$ wählen und somit Punkte (x_n, y_n) für $n = 1, \ldots, 8$ berechnen. Der Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ stellt den Anfangswert dar und muß nicht mehr berechnet werden.

3. Skizziere mit Hilfe von Maple das Richtungsfeld folgender DGLen. [6]

(a) $y' = y^2 - x^2$ in $D := [-1,3] \times [-3,3]$.

(b) $y' = y - x^2$ in $D := [-1,2] \times [0,12]$.

Maple-Eingaben zur Teilaufgabe (a):

```
> restart;
> Dgl := diff(y(x),x) = f(x,y(x));
> f:=(x,y)->y^2-x^2;
> with(DEtools):
> dfieldplot(Dgl,y(x),x=-1..3,y=-3..3,color=black,axes=boxed);
```

Hinweis: So startet man Maple auf der theseus:

```
> ssh theseus
> xmaple &
```

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/ode

Prof. Dr. W. Forst
Markus Biegert
SS 2005

Gesamt: 16+8 Punkte

Übungen zu DGLen für Lehramtskandidaten

Blatt : 2

4. Bestimme die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der folgenden Anfangswertaufgaben.

- $y' = -2$ und $y(3) = 1$. [2]
- $y' = -4y$ und $y(3) = 2$. [2]
- $y' = -10y + 5$ und $y(3) = 1$. [2]
- $y' = \ln(2)y^2 - \ln(2)y$ und $y(0) = 1/2$. [2]

Hinweis: ln ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

5. Wir betrachten die folgende Anfangswertaufgabe:

$$y'(x) = \sqrt{2}e^{y(x)}\cos(x), \quad y(0) = 0.$$

(a) Skizziere mit Maple das Richtungsfeld obiger DGL. [2]

(b) Bestimme das *maximale* offene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ der obigen AWA. [4]

(c) Vergleiche Deine Lösung mit der von Maple berechneten Lösung. [2]

6. $(*)$ Wir betrachten die folgende AWA.

$$\begin{cases} y' = (3y^2)^{1/3} \\ y(5) = 3. \end{cases}$$

1. Skizziere mit Maple das Richtungsfeld obiger DGL in $D = [1,3] \times [-1,1]$. [2]
2. Bestimme eine Lösung $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der obigen AWA. [4]
3. Bestimme eine von y_1 verschiedene Lösungen $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der obigen AWA. [2]
   Hinweis: Betrachte das skizzierte Richtungsfeld.

Beachte: $(3y^2)^{1/3} = 3^{1/3}|y|^{2/3}$ ist für alle $y \in \mathbb{R}$ definiert.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Abgabetermin: Di, 03.05.2005

Prof. Dr. W. Forst
Markus Biegert
SS 2005

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu DGLen für Lehramtskandidaten

Blatt : 3

7. **Bestimme** das maximale Lösungsintervall I und eine darauf definierte Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ der folgenden AWAn. Skizziere (Maple) anschließend auf einem angemessenen Intervall $I_0 \subset I$ die von Dir berechnete Lösung y.

(a) $1 + y^2 - xy' = 0$ und $y(1) = 1$. [3]

(b) $(1 + e^x)yy' = e^x$ und $y(1) = 1$. [3]

(c) $(1 + y^2)(1 - 2x) = 2\sqrt{x - x^2}y'$ und $y(1/2) = \tan(1/2)$. [3]

8. **Löse** folgende DGLen vom Typ $y' = f((p_1x + q_1y + r_1)/(p_2x + q_2y + r_2))$.

(a) $y' = x^2 + 2xy + y^2$ und $y(\pi/4) = 1 - \pi/4$. [2]

(b) $y' = y^2/x^2 + y/x$ und $y(1) = 1$. [2]

9. **Löse** die folgende AWA durch Substitution $u(x) = x^2y(x)$. Hinweis: Vergleiche hier die Methode um DGLen vom Typ $y' = f(\lambda x + y)$ zu lösen. [5]

$$3x^2y^2 - 2y - xy' = 0 \quad \text{und} \quad y(1) = 1.$$

Überprüfe mit Hilfe von Maple wie folgt ob die von Dir berechnete Lösung korrekt ist. [2]

```
> restart;
> Dgl:=3*x^2*y(x)^2-2*y(x)-x*diff(y(x),x);
> AnfBed:=y(1)=1;
> dsolve({Dgl,AnfBed},y(x));
```

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/ode

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Forst
Markus Biegert
SS 2005

Abgabetermin: Di, 10.05.2005

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu DGLen für Lehramtskandidaten

Blatt : 4

10. Bestimme die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der folgenden AWA.

(a) $y_1' = 2y_1 + 4$, $y_1(0) = 1$. [3]

(b) $y_2' = 2y_2 + 4x$, $y_2(0) = 1$. [3]

(c) $y_3' = 2y_3 + 4x + 4$, $y_3(0) = 2$. [3]

11. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Für $x \in I$ gelte [4]

$$y_1'(x) = f(x)y_1 + g_1(x) \quad \text{und} \quad y_2'(x) = f(x)y_2 + g_2(x).$$

Zeige: $y_3 := y_1 + y_2$ ist eine Lösung der DGL

$$y_3' = f(x)y_3 + g_1(x) + g_2(x).$$

12. Bestimme die Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ der folgende AWAn.

(a) $y' + 2xy = 2x^3y^3$, $y(0) = \sqrt{2}$. [4]

(b) $y' = y + xy^2$, $y(0) = 1$. [3]

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Forst
Markus Biegert
SS 2005

Abgabetermin: Di, 17.05.2005

Gesamt: 23 Punkte

Übungen zu DGLen für Lehramtskandidaten

Blatt : 5

13. Wir betrachten folgende AWA vom Typ $y'' = f(y)$:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Berechne die Gesamtenergie E wie in der Vorlesung angegeben. [3]

(b) Bestimme eine Lösung der obigen AWA. [4]

(c) Überprüfe ob die von Dir berechnete Lösung korrekt ist. [1]

14. Wir betrachten die folgende AWA:

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Warum liefert der Existenz- und Eindeutigkeitssatz (Satz 3.1) *keine* Lösung der obigen AWA auf dem Intervall $J = [-2, 2]$. [2]

(b) Zeige, daß der Existenz- und Eindeutigkeitssatz (Satz 3.1) eine Lösung der obigen AWA für das Intervall $J = [-0.25, 0.25]$ liefert. [4]

15. Wir betrachten die folgende AWA:

$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Zeige, daß der Existenz- und Eindeutigkeitssatz eine Lösung der obigen AWA auf dem Intervall $J = [-1, 1]$ liefert. [2]

(b) Berechne beim Picard-Verfahren für den Anfangswert $y_0(x) := 1$ die Näherungs-lösungen y_1, y_2, y_3 und y_4. [4]

(c) Zeige, daß in diesem Fall für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $y_n(x) = y_{n-1}(x) + (-1)^n x^n / n!$. [2]

(d) Schreibe die Näherungslösungen y_n in eine geschlossene Form. [1]

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Forst
Markus Biegert
SS 2005

Abgabetermin: Di, 24.05.2005

Gesamt: 14 Punkte

Übungen zu DGLen für Lehramtskandidaten

Blatt : 6

16. Für den Vektorraum $D := C([-1,1])$ der stetigen und reellwertigen Funktionen auf dem kompakten Intervall $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ betrachten wir die Abbildung $T : D \to D$ gegeben durch

$$(Tf)(x) := 1 + \int_0^x f(t)/2\, dt.$$

(a) Zeige, daß für jede stetige Funktion $f \in C([-1,1])$ die Funktion (Tf) wieder stetig auf $[-1,1]$ ist, d.h. T ist wirklich eine Abbildung von D in D. [2]

(b) Berechne $\|T\|$ welche gegeben ist durch [2]

$$\|T\| := \inf\left\{\alpha \in [0,\infty) : \forall f,g \in D \text{ ist } \|Tf - Tg\|_{C([-1,1])} \le \alpha \, \|f-g\|_{C([-1,1])}\right\}.$$

<u>Hinweis</u>: Für $g \in D$ ist $\|g\|_D := \|g\|_{C([-1,1])} := \sup_{x \in [-1,1]} |g(x)|$.

(c) Zeige: Ist $\|T\| < 1$, dann ist die für jedes $f \in D$ die Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ gegeben durch [2]

$$f_1 := f, \quad f_n := Tf_{n-1} \text{ für } n \ge 2,$$

eine Cauchyfolge in $C([-1,1])$.

(d) Zeige, daß es genau einen Fixpunkt von T in D gibt, d.h. es gibt genau ein $f_0 \in D$ so daß für alle $x \in [-1,1]$ gilt: [4]

$$f_0(x) = (Tf_0)(x) = 1 + \int_0^x f_0(t)/2\, dt.$$

(e) Bestimme den Fixpunkt f_0 von T. [4]

<u>Hinweis:</u> Welche AWA erfüllt der Fixpunkt?

Übungen zu DGLen für Lehramtskandidaten

Blatt : 7

17. Wir betrachten folgendes DGL-System

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1. \end{cases} \qquad \text{mit Anfangswert} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$$

Diese AWA können wir auch so formulieren:

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = (0,1)^T, \end{cases}$$

wobei die Matrix A gegeben ist durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) **Zeige** mit Hilfe der Picard-Iteration die Existenz einer Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. [3]

(b) **Zeige** nun die Eindeutigkeit der Lösung.

Hinweis: Vergleiche Beispiel 2 aus Kapitel 3 der Vorlesung. [3]

18. Wir haben in der Vorlesung die Normen $|\cdot|_p$ mit $p \in [1,\infty]$ des $\mathbb{R}^2$ kennengelernt.

(a) **Zeige**: Für $c > 0$ ist $\|\cdot\|$ gegeben durch $\|x\| := c|x|_p$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$. [2]

(b) **Bestimme** eine weitere Norm $\|\cdot\|_w$ des $\mathbb{R}^2$. [2]

(c) **Skizziere** mit Hilfe von Maple den Einheitskreis [2]

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_w = 1\right\}.$$

Hinweis:

```
> with(plots):
> implicitplot( ? , x=-1..1, y=-1..1,numpoints=1000);
```

Prof. Dr. W. Forst
Markus Biegert
SS 2005

Gesamt: 15 Punkte

Abgabetermin: Di, 07.06.2005

Übungen zu DGLen für Lehramtskandidaten

Blatt : 8

19. Wir betrachten folgende explizite Differentialgleichung 3.-ter Ordnung: [3]

$$\eta^{(3)} = 6\eta^{(2)} - 11\eta' + 6\eta.$$

Schreibe diese DGL in ein Differentialgleichungssystem 1-ter Ordnung um.

20. Wir betrachten folgende Differentialgleichung 2-ter Ordnung mit Anfangswert: [4]

$$\eta''(x) = 3\eta'(x) + 4\eta(x) + 4x, \quad \eta(0) = 3/4,\ \eta'(0) = -1.$$

Schreibe nun diese Differentialgleichung mit Anfgangswert in ein Differentialgleichungssystem 1-ter Ordnung mit Anfangswert um.

21. Wir betrachten folgendes Anfangswertproblem: [5]

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y(x) = A \cdot y(t), \quad y(0) = b = (1, 1, -1)^t.$$

Zeige mit Hilfe von Satz 3.2 oder Satz 3.3, daß diese AWA eine eindeutige Lösung auf $\mathbb{R}$ besitzt.

22. **Bestimme** die eindeutige Lösung der AWA aus Aufgabe 21 mit Hilfe von Maple. [3]
Hinweis:

```
> with(linalg):
> sys:=[diff(y1(x),x)=y1(x)+2*y2(x)+y3(x),
        diff(y2(x),x)=y3(x),
        diff(y3(x),x)=0,
        y1(0)=1, y2(0)=1, y3(0)=-1];
> dsolve(sys);
```

Übungen zu DGLen für Lehramtskandidaten

Blatt : 9

23. Wir betrachten folgendes explizites DGL-System höherer Ordnung:

$$\begin{aligned} u''(x) &= w(x) + w'(x) \\ v''(x) &= w(x) - w'(x) \\ w'''(x) &= u(x)/2 - v(x)/2 \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \quad v(0) = 1, \quad v'(0) = -1, \quad w(0) = 1, \quad w'(0) = 0, \quad w''(0) = 1.$$

(a) **Schreibe** dies in ein DGL-System 1. Ordnung mit Anfangswert um. [4]

(b) **Bestimme** mit Hilfe von Maple die Lösung u, v und w dieses DGL-Systems. [2]

Hinweis: Vergleiche hierzu auch das Maple-Worksheet im Internet zu Kapitel 4.

(c) **Begründe** warum diese AWA genau eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt. [2]

24. Wir betrachten folgende lineare DGL (mit konstanten Koeffizienten) auf $\mathbb{R}$:

$$\eta(x) + \eta'(x) + \eta^{(2)}(x) + \eta^{(3)}(x) = 0.$$

Sei $L_H := \left\{\eta \in C^3(J) : \eta \text{ löst obige DGL}\right\}$ die Lösungsmenge der obigen DGL.

(a) **Begründe**, warum L_H ein Unterraum von $C_0(J, \mathbb{C})$ ist. [2]

(b) **Bestimme** nun die Dimension des Vektorraums L_H. [2]

(c) **Bestimme** durch Raten drei linear unabhängige Lösungen η_1, η_2 und η_3. [2]

(d) **Berechne** die Determinante (in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$) der Matrix [3]

$$Y(x) := \begin{pmatrix} \eta_1(x) & \eta_2(x) & \eta_3(x) \\ \eta_1'(x) & \eta_2'(x) & \eta_3'(x) \\ \eta_1''(x) & \eta_2''(x) & \eta_3''(x) \end{pmatrix}$$

und entscheide ob die Matrix $Y(x)$ invertierbar ist.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Forst
Markus Biegert
SS 2005

Gesamt: 16 Punkte

Abgabetermin: Di, 21.06.2005

Übungen zu DGLen für Lehramtskandidaten

Blatt : 10

25. Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $y_1(x) := f(\sin(x))$ eine Lösung der DGL [2]

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0$$

auf $J = \mathbb{R}$, wobei $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. Zeige, daß auch $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $y_2(x) := f(\cos(x))$ eine Lösung dieser DGL auf $\mathbb{R}$ ist.

26. Wir betrachten folgende homogene lineare DGL zweiter Ordnung

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) - \frac{1}{x^2}u(x) = u''(x) + f_1(x)u'(x) + f_2(x)u(x) = 0$$

auf dem Intervall $J = (0, \infty)$. Wir prüfen sofort nach, daß $y_1(x) = x$ eine Lösung diese DGL ist. Wir wollen nun eine zweite Lösung y_2 so bestimme, daß

$$w(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in J.$$

(a) **Benutze** die Formel von Liouville um die Wronski-Determinate $w(x)$ bis auf eine multiplikative Konstante $c \neq 0$ zu bestimmen. Im Folgenden wählen wir $c = 1$. [2]

(b) **Setze** die bekannte Lösung y_1 oben ein und berechne nun die Wronski-Determinate $w(x)$ in Abhängigkeit von $y_2(x)$ und $y_2'(x)$. [2]

(c) **Folgere** nun, daß y_2 der DGL $y_2' = y_2(x)/x + c/x^2$ genügt und löse diese DGL mit Hilfe der Variation der Konstanten (Vgl. Abschnitt 2.3 der Vorlesung). [3]

27. Begründe, welche der folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. [7]

1. Ist $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$, dann gibt es eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ mit $y'(x) = A^2 \cdot y(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. Ist $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$, dann gibt es eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ mit $y''(x) = A^2 \cdot y(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.
3. Ist $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$, dann gibt es immer eine Fundamentalmatrix Y zu $y'(x) = A^2 y(x)$.

Im Folgenden sei $J = (0,3)$ und $F : J \to \mathbb{C}^{k \times k}$ stetig. Wir betrachten dann das homogene lineare DGL-System (H) $y' = F(x)y$ auf J.

4. Es gibt eine Wronski-Matrix Z zu (H) so daß $\det(Z(1)) < 0$ und $\det(Z(2)) > 0$.
5. Ist Z eine Wronski-Matrix zu (H) und $\mathrm{Spur}(Z) = 0$ auf J, so ist $\det(Z)$ konstant.
6. Ist Z eine Wronski-Matrix zu (H) und $\det(Z)$ konstant auf J, dann ist $\mathrm{Spur}(Z) = 0$.
7. Es gibt nur endlich viele Lösungen von (H).

Prof. Dr. W. Forst
Markus Biegert
SS 2005

Abgabetermin: Di, 28.06.2005

Gesamt: 16 Punkte

Übungen zu DGLen für Lehramtskandidaten

Blatt : 11

28. **Berechne** die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der folgenden Anfangswertaufgabe: [5]

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y(x) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: In (A1, Blatt 7) wurde eine (linear unabhängige) Lösung der homogenen DGL $y' = Ay$ berechnet. Eine weitere linear unabhängige Lösung erhält man aus Symmetrie-Gründen. Verfahre nun wie in Beispiel 3, Abschnitt 4.3.

29. **Bestimme** die Lösung $\eta : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ folgender AWA 2-ter Ordnung: [5]

$$\eta''(x) + \eta'(x)/x - \eta(x)/x^2 = x^2, \qquad \eta(1) = 1,\ \eta'(1) = 1.$$

Hinweis: Vergleiche (A2, Blatt 10) um eine Fundamentalmatrix zu bestimmen.

30. Wir betrachten folgende Anfangswertaufgabe:

$$\eta''(x) - 3\eta'(x) - 4\eta(x) = 4x, \qquad \eta(0) = 3/4,\ \eta'(0) = -1.$$

(a) **Zeige**, daß $\eta_1(x) := e^{-x}$ und $\eta_2(x) := e^{4x}$ zwei linear unabhängige Lösungen der dazugehörigen homogenen DGL sind. [1]

(b) **Bestimme** nun mit Hilfe von (a) die Lösung der obigen Anfangswertaufgabe. [5]

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Forst
Markus Biegert
SS 2005

Gesamt: 17 Punkte

Abgabetermin: Di, 05.07.2005

Übungen zu DGLen für Lehramtskandidaten

Blatt : 12

31. Wir betrachten folgende lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$\eta^{(4)} - 2\eta^{(3)} + 5\eta^{(2)} = 0.$$

(a) Wir erkennen, daß $\eta_1(x) := 1$ und $\eta_2(x) := x$ linear unabhängige Lösungen sind. **Berechne** nun $\tilde{F}_{22}$ wie in Abschnitt 4.4. der Vorlesung (Reduktion der Ordnung) angegeben. [4]

(b) **Berechne** mit Hilfe von Maple eine Fundamentalmatrix Z_{22} zu $z_2' = \tilde{F}_{22} z_2$. [2]

(c) **Berechne** eine Fundamentalmatrix Y zu obiger DGL. [3]

32. Für $p_1(\lambda) := \lambda^2 - 2\lambda + 1$ und $p_2(\lambda) := \lambda^2 - 4\lambda + 4$ setzen wir [4]

$$p(\lambda) := p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 13\lambda^2 - 12\lambda + 4.$$

Wir betrachten dazu folgende Differentialgleichungen:

1. $y'' - 2y' + y = 0$,
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$,
3. $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 13y'' - 12y' + 4y = 0$.

Zeige, daß jede Lösung von (1) und jede Lösung von (2) auch eine Lösung von (3) ist.

33. **Bestimme** eine Fundamentalmatrix Y zu folgender DGL [4]

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Übungen zu DGLen für Lehramtskandidaten

Blatt : 13

34. Sei I die Einheitsmatrix im $\mathbb{C}^N$, $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ und $t \in \mathbb{R}$, so daß $A^2 = -I$. **Zeige**, daß gilt:

$$e^{tA} = \cos(t)I + \sin(t)A.$$

Bem: Ist $N = 1$ und $A = i$, so ist $e^{tA} = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) = \cos(t)I + \sin(t)A$.

35. Sei I die Einheitsmatrix im $\mathbb{C}^N$, $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ und $t \in \mathbb{R}$, so daß $A^2 = I$. **Zeige**, daß gilt:

$$e^{tA} = \cosh(t)I + \sinh(t)A.$$

Bem: Vergleiche dazu Aufgabe 1, Blatt 7.

36. Wir betrachten die Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := e^A.$$

Berechne nun (falls existent) die Inverse von B.

37. **Bestimme** die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der folgenden Anfangswertaufgabe:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Kann die obige Matrix A diagonalisiert werden? Was ist dann e^{tA}?

38. **Bestimme** die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der folgenden Anfangswertaufgabe:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} y(t), \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Ist obige Matrix A diagonalisierbar? Falls nein, so kann man die Jordansche Normalform betrachten!

39. **Bestimme** die Lösung $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der folgenden Anfangswertaufgabe:

$$\eta''' - 6\eta'' + 12\eta' - 8\eta = 0, \qquad \eta(0) = 1,\ \eta'(0) = 3,\ \eta''(0) = 10.$$