Übungen zu PDE
Sommersemester 2005.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Biegert
SS 2005

Abgabetermin: Do, 21.04.2005

Gesamt: 24 Punkte

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 1

1. (a) Sei $w \in C^2(\mathbb{R})$ eine 2π-periodische Funktion welche der DGL $w'' + \lambda w = 0$ genügt. **Zeige**: Ist $w \not\equiv 0$, dann ist $\lambda = n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. [4]
Hinweis: Partielle Integration.

(b) **Zeige**: Für $n \in \mathbb{N}$ sind $v_n(r) := r^n$ und $v_{-n}(r) := r^{-n}$ Lösungen von [1]

$$r^2 v''(r) + r v'(r) = n^2 v(r) \qquad \text{für } r \in (0, \infty).$$

(c) **Zeige**: Für $n = 0$ sind $v_c(r) := 1$ und $v_l(r) := \ln(r)$ Lösungen von [1]

$$r^2 v''(r) + r v'(r) = 0 = n^2 v(r) \qquad \text{für } r \in (0, \infty).$$

(d) Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $u_n(r, \theta) := (c_n r^n + d_n r^{-n})(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$, wobei a_n, b_n, c_n, d_n reelle Zahlen sind. Für $n = 0$ setzen wir $u_0(r, \theta) := (c_0 + d_0 \ln(r))/2$, wobei c_0 und d_0 reelle Zahlen sind. **Zeige**, daß u_n eine Lösung des folgenden Problems ist: [2]

$$\begin{cases} u(r, \cdot) \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch,} \\ u_{rr} + r^{-1} u_r + r^{-2} u_{\theta\theta} = 0 \text{ für } r > 0. \end{cases}$$

(e) Wir betrachten nun den Kreisring $R := \mathscr{B}(0,1) \setminus \overline{\mathscr{B}(0,\rho)} \subset \mathbb{R}^2$ mit einem $\rho \in (0,1)$ und Funktionen $\varphi_1 \in C(\Gamma_1)$ und $\varphi_2 \in C(\Gamma_\rho)$ mit $\Gamma_\delta = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = \delta\right\}$. Dazu betrachten wir Funktionen [8]

$$f_1(\theta) := \varphi_1(\cos(\theta), \sin(\theta)) \qquad \text{und} \qquad f_2(\theta) := \varphi_2(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)).$$

Wir suchen eine Funktion $u \in C^2((\rho,1) \times \mathbb{R})$ mit den Eigenschaften:

1. $u(r, \cdot)$ ist 2π-periodisch für $\rho < r < 1$.
2. $u_{rr} + r^{-1} u_r + r^{-2} u_{\theta\theta} = 0$ für $\rho < r < 1$.
3. $\lim_{r \uparrow 1} u(r, \theta) = f_1(\theta)$ glm. in θ.
4. $\lim_{r \downarrow \rho} u(r, \theta) = f_2(\theta)$ glm. in θ.

In anderen Worten: Wir suchen eine Funktion $u \in C^2(R) \cap C(\overline{R})$ welche die Lösung des folgenden Problems ist:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } R, \\ u(x) = f_1(x) \text{ für } |x| = 1, \\ u(x) = f_2(x) \text{ für } |x| = \rho. \end{cases}$$

Bestimme nun die Konstanten $c_0, d_0, c_n, d_n, a_n, b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ in Abhängigkeit der Funktionen f_1 und f_2 so daß die Funktion u gegeben durch

$$u(r, \theta) := \frac{1}{2}(c_0 + d_0 \ln(r)) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{-n})(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \tag{1}$$

die oben genannten Eigenschaften (1) bis (4) besitzt.

2. **Löse** das Anfangswertproblem [4]

$$\begin{cases} u \in C^2(\mathbb{R}^2) \\ 2u_t + 3u_x = \cos(x) \\ u(0,x) = (2/3)\sin(x). \end{cases}$$

3. Sei $\Omega := \mathscr{B}(0,1)$ die offene Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$. In der Vorlesung haben wir gesehen, daß es für jede stetige Funktion $\varphi \in C(\partial\Omega)$ eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gibt, welche in Ω harmonisch und auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω gleich φ ist. [4]

Zeige, daß $\Omega := \mathscr{B}(0,1) \setminus \{0\}$ nicht die oben genannte Eigenschaft besitzt.

Hinweis: Wie sieht die eindeutige Lösung $u(r,\theta)$ von Aufgabe (1e) aus wenn f_1 und f_2 konstante Funktionen sind? Benutze nun die Rotations-Invarianz für harmonische Funktionen.

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 2

4. Wir betrachten folgende **Wärmeleitungsgleichung mit Neumann Randbedingungen**:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & t > 0,\ x \in (0,\pi), & \text{Differentialgleichung (DGL)} \\ u_x(t,x) = 0 & x \in \{0,\pi\},\ t > 0, & \text{Randbedingungen (RB)} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in [0,\pi], & \text{Anfangswert (AW).} \end{cases}$$

(a) **Zeige**, daß U_n für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben durch [2]

$$U_n(x,t) := e^{-n^2 t}\cos(nx)$$

die Bedingungen (DGL) und (RB) erfüllen.

(b) Sei $u_0 \in C^1[0,\pi]$ mit $u_0'(0) = u_0'(\pi) = 0$. **Zeige**, daß für geeignete Konstanten a_n, $(n \in \mathbb{N}_0)$, die Funktion u gegeben durch [6]

$$u(t,x) := \frac{a_0}{2}U_0(t,x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(t,x)$$

folgende Eigenschaften hat:

- $u : (0,\infty) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ ist ∞-oft differenzierbar.
- Die Funktion $g : [0,\infty) \to C([0,\pi])$ gegeben durch $g(t) := u(t,\cdot)$ ist stetig.
- u ist eine Lösung der obigen WLG, d.h. u erüllt (DGL), (RB) und (AW).

(c) Sei $u \in C([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^1((0,\infty) \times [0,\pi])$ eine Lösung der obigen WLG. Die Gesamtwärme $\mathscr{W}(t)$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ sei gegeben durch $\mathscr{W}(t) := \int_0^\pi u(t,x)\,dx$. **Zeige**, daß $\mathscr{W}(\cdot) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ konstant ist. Hinweis: Berechne $\partial \mathscr{W} / \partial t$. [2]

(d) **Zeige**, daß es für jedes $u_0 \in C([0,\pi])$ höchstens eine Lösung [2]

$$u \in C([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^1((0,\infty) \times [0,\pi])$$

gibt. Hinweis: Betrachte die Energie $\mathscr{E}(t) := (1/2)\int_0^\pi u(t,x)^2\,dx$.

(e) **Gebe** die Lösung der WLG mit Neumannrandbedingungen auf dem Intervall $I = (0,\pi)$ für den Anfangswert $u_0(x) := \sin^2(x)$ explizit an. [2]

5. Wir betrachten folgende **Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet Randbedingungen**:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & t > 0,\ x \in (0,\pi), & \text{Differentialgleichung (DGL)} \\ u(t,x) = 0 & x \in \{0,\pi\},\ t > 0, & \text{Randbedingungen (RB)} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in [0,\pi], & \text{Anfangswert (AW).} \end{cases}$$

Sei $u_0 \in C_0([0,\pi])$ und $u \in C([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^\infty((0,\infty),[0,\pi])$ die nach Theorem 3.4 eindeutige Lösung der obigen WLG.

(a) **Zeige**, daß [3]

$$\int_0^\pi |u_x(t,x)|^2\,dx \to 0 \quad (t \to \infty).$$

(b) **Zeige**: [3]

$$u(t,\cdot) \to 0 \quad \text{in } C([0,\pi]) \quad \text{für } t \to \infty,$$

d.h. $\|u(t,\cdot)\|_{C([0,\pi])} := \sup_{x\in[0,\pi]} |u(t,x)| \to 0$ für $t \to \infty$.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Abgabetermin: TBA

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Biegert
SS 2005

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 3

6. (a) Sei $\tau > 0$ eine postive reelle Zahl. Dazu betrachten wir die offene Menge

$$\Omega_\tau := (0,\tau) \times (0,\infty) \subset \mathbb{R}^2.$$

Zeige: Ist $u \in C^{1,2}(\Omega_\tau) \cap C\left(\overline{\Omega_\tau}\right)$ so daß

- $u_t = \Delta u$ in Ω_τ und
- $|u(t,x)| \leq Ae^{a|x|^2}$ in Ω_τ,

dann gilt

$$\sup_{\overline{\Omega_\tau}} u = \sup_{(t,x)\in\partial^\star\Omega_\tau} u(t,x),$$

wobei $\partial^\star\Omega_\tau := \{(t,x) \in [0,\tau] \times \mathbb{R}_+ : t = 0 \text{ oder } x = 0\}$.

(b) *(Freiwillige Aufgabe)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine beliebige offene Menge und $\Omega_\tau := (0,\tau) \times \Omega$. **Formuliere** und **beweise** ein zur obigen Teilaufgabe analoges Resultat.

7. Sei $u_0 \in C_0(\mathbb{R})$. **Bestimme**, analog zur Black-Scholes Gleichung, eine Lösung von

$$(P) \begin{cases} u \in C^{1,2}((0,\infty) \times \mathbb{R}) \cap C([0,\infty) \times \mathbb{R}), \\ u_t(t,x) = e^{-2x}[u_{xx} - u_x] \text{ in } (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), x \in \mathbb{R}, \\ |u(t,x)| \leq Ae^{ae^{2x}}. \end{cases}$$

8. Sei $u_{0,m} \in L^1(\mathbb{R}^N)_+$ so daß $\int_{\mathbb{R}^N} u_{0,m}(y)\, dy = 1$ und $\operatorname{supp}(u_{0,m}) \subset \mathscr{B}(y_0, 1/m)$. Für diese Folge von Funktionen setzen wir

$$u_m(t,x) := \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x-y|^2/(4t)} u_{0,m}(y)\, dy.$$

Zeige, daß $u_m(t,x) \to \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-|x-y_0|^2/(4t)}$ für $m \to \infty$.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Biegert
SS 2005

Gesamt: 20 Punkte

Abgabetermin: Do. 12.05.2005

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 4

9. Sei E das Newtonsche Potential im $\mathbb{R}^2$. **Zeige**: [5]

$$D_i D_i E \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$$

für $i = 1, 2$.

10. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene und beschränkte Menge mit C^1-Rand und sei $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ eine auf Ω harmonische Funktion. **Zeige**, daß für $E_x := E(y-x)$ gilt: [5]

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial E_x}{\partial \nu}(y)\, d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} E_x(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, d\sigma(y).$$

- Hier ist E das Newtonsche Potential im $\mathbb{R}^N$ und ν die äußere Normale.
- Satz 2.7 darf nicht benutzt werden.

11. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene und beschränkte Menge der Klasse C^1. **Zeige**, daß für jedes $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C_0(\Omega)$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt: [5]

$$2 \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \leq \varepsilon \int_\Omega (\Delta u)^2\, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega u^2\, dx.$$

Definition 1 *Eine offene und beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ heißt* Dirichlet regulär, *falls es für jede Funktion $\varphi \in C(\partial\Omega)$ eine Funktion $u \in C(\overline{\Omega})$ gibt welche in Ω harmonisch ist und auf dem Rand von Ω mit der Funktion φ übereinstimmt.*

12. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene und beschränkte Menge, so daß es für alle $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ eine Funktion $u \in C(\overline{\Omega})$ gibt welche in Ω harmonisch ist und auf dem Rand von Ω mit der Funktion φ übereinstimmt. **Zeige,** daß Ω Dirichlet regulär ist. [5]

Hinweis:

- Zeige, daß $D := \left\{ \varphi|_{\partial\Omega} : \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \right\}$ dicht in $C(\partial\Omega)$ liegt.
- Benutze: Der gleichmäßige Grenzwert harmonischer Funktionen ist harmonisch.

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Biegert
SS 2005

Gesamt: 20 Punkte

Abgabetermin: Do. 19.05.2005

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 5

13. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$. **Zeige**, daß es eine Funktion $F \in C(I) \subset L^1_{\text{loc}}(I)$ gibt, so daß die schwache Ableitung F' von F gleich f ist.

14. Sei $\Omega := (0,1) \cup (1,2) \subset \mathbb{R}$ die Vereinigung zweier disjunkter Intervalle. **Zeige:** Ist $u \in W^{1,1}(\Omega) \cap C((0,2))$, dann ist $u \in W^{1,1}((0,2))$.

15. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und seien $u, v \in W^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. **Zeige**, daß $uv \in W^1(\Omega)$ und $D_j(uv) = (D_j u)v + u(D_j v)$ mit

(a) Hilfe der Definition (3.1).

(b) Hilfe von Satz (3.8) bzw. dessen Beweis.

Hinweis: Der verallgemeinerte Satz über die dominierte Konvergenz kann hilfreich sein.

16. Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ eine kompakte Menge und seien $O_1, \ldots, O_n$ offene Mengen so daß $K \subset \bigcup_{j=1}^n O_j$. **Zeige**, daß es Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ gibt so daß

$$0 \leq \varphi_j \leq 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{supp}(\varphi_j) \subset O_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, n$$

und $\sum_{j=1}^n \varphi_j(x) = 1$ für jedes $x \in K$.

Hinweis:

- Zeige, daß es kompakte Mengen $K_j \subset O_j$ gibt mit $K \subset \bigcup_j K_j^\circ$.
- Zeige nun die Existenz solcher Funktionen in $C_c(\mathbb{R}^N)$.
- Betrachte dann deren Regularisierungen $(\star\rho_\varepsilon)$.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Biegert
SS 2005

Abgabetermin: TBA

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 6

17. Sei $I = (a,b)$ ein beschränktes Intervall in $\mathbb{R}$ und $p \in [1,\infty]$. **Zeige**, daß $u \in W^{1,p}(I)$ ist genau dann wenn $u \in C([a,b])$ ist und es ein $g \in L^p(I)$ gibt, so daß

$$u(t) = u(a) + \int_a^t g(s)\, ds \tag{2}$$

mit einem $a \in I$.

Bemerkung: Wir sagen eine Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ist in $C(\overline{\Omega})$, falls es eine Funktion $\tilde{u} \in C(\overline{\Omega})$ gibt, so daß $u = \tilde{u}$ fast überall auf Ω.

18. (a) Seien $(u_n)_n$ eine Folge in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ welche in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ gegen eine Funktion u in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ konvergiert und sei $\varphi \in L^\infty(\Omega)$. **Zeige**, daß $(u_n\varphi)_n$ gegen $u\varphi$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ konvergiert.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge. **Zeige**: Ist $u \in W^1(\Omega)$ dann gilt:

$$\int_\Omega D_j\varphi u = -\int_\Omega \varphi D_j u \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Hinweis: Zeige, daß $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ ist für kleines $\varepsilon > 0$.

19. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene und beschränkte Menge.

(a) **Zeige**: $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ falls $1 \leq q < p \leq \infty$ und es gilt:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \cdot \|u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in L^p(\Omega)$$

mit einer von u unabhängigen Konstante C.

(b) **Zeige**: $W^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,q}(\Omega)$ falls $1 \leq q < p \leq \infty$ und es gilt:

$$\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

mit einer von u unabhängigen Konstante C.

20. Wir betrachten die Funktion $f(x) := |x|^\alpha$ die bis auf evtl. den Ursprung wohldefiniert ist. **Bestimme** nun die Paare $(\alpha, p) \in \mathbb{R} \times [1,\infty)$ (in Abhängigkeit der Dimension N) für welche gilt:

$$f \in W^{1,p}(\mathscr{B}(0,1)),$$

wobei $\mathscr{B}(0,1)$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^N$ bezeichnet.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Abgabetermin: Do. 02.06.2005

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Biegert
SS 2005

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 7

21. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge und $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ wobei $p \in [1,\infty]$.

(a) **Zeige**, daß es eine stetige Funktion $\tilde{u} \in C(\mathbb{R})$ gibt, so daß $u = \tilde{u}$ fast überall in Ω.

(b) **Zeige**, daß $\tilde{u} = 0$ auf $\partial\Omega$.

22. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge.

(a) **Zeige**: Für $c \geq 0$ ist die Abbildung $u \mapsto \min(u,c)$ von $W^{1,p}(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$ stetig.

(b) Sei $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ und $(u_k)_k \subset W^{1,p}(\Omega)$ so daß $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. **Zeige**, daß auch $v_k := (u_k \wedge \|u\|_{L^\infty(\Omega)}) \vee (-\|u\|_{L^\infty(\Omega)})$ gegen u in $W^{1,p}(\Omega)$ konvergiert.

23. **Zeige** anhand eines Beispiels, daß der Satz von Serrin (2.10) nicht für den Fall $p = \infty$ gilt, d.h. es gilt

$$\overline{W^{1,\infty}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)}^{W^{1,\infty}(\Omega)} \neq W^{1,\infty}(\Omega).$$

24. Sei $\Omega := (0,1) \subset \mathbb{R}$. **Zeige**, daß $W^{1,\infty}(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ und $W^{1,\infty}(\Omega) \neq W^{1,1}(\Omega)$.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Biegert
SS 2005

Gesamt: 20 Punkte

Abgabetermin: Mi./Do. 08/09.06.05

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 8

25. Wir zeigen, daß die Poincaré-Ungleichung im $\mathbb{R}^N$ nicht richtig ist, d.h. **zeige**, daß es keine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le C \cdot \sqrt{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx}.$$

Hinweis: Betrachte eine Funktion $\varphi \in C_c^\infty(\mathscr{B}(0,1))$ und Funktionen $\varphi_n(x) := \varphi(x/n)$.

26. WICHTIGE AUFGABE:
Sei $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Dann wollen wir zeigen daß es für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Funktion $u \in C^1(\overline{\Omega})$ gibt, so daß gilt:

$$(\mathrm{R}) \quad \begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{(im schwachen Sinne)} \\ u'(0) = \alpha u(0) \\ u'(1) = -\beta u(1), \end{cases}$$

wobei α, β nicht-negative Konstanten mit $\alpha + \beta > 0$ sind.

(a) **Zeige**, daß die Einbettung $H^1(\Omega)$ in $C(\overline{\Omega})$ stetig ist.

(b) Seien $a < b$ reelle Zahlen und $u, v \in H^1((a,b))$. **Zeige** die *partielle Integration*, d.h. daß

$$\int_a^b u'v = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b uv'.$$

Hinweis: Vergleiche Aufgabe 1, Blatt:6.

(c) Sei $V := H^1(\Omega)$. Dann betrachten wir die bilineare Abbildung $a : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$a(u,v) := \int_\Omega u'(x)v'(x)\, dx + \alpha u(0)v(0) + \beta u(1)v(1).$$

(i) **Zeige**: a ist stetig, d.h. $\exists M > 0$ so daß $|a(u,v)| \le M \|u\|_V \|v\|_V$, $\forall u, v \in V$.

(ii) **Zeige**, daß a koerziv ist, also daß $a(u,u) \ge \mathfrak{a} \|u\|_V^2$, $\forall u \in V$ mit $\mathfrak{a} > 0$.

(d) **Zeige**, daß die Abbildung $F : V \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(v) := \int_\Omega fv$ linear und stetig ist, d.h. daß $F \in V'$ ist.

(e) **Folgere** mit einem passenden Satz der Vorlesung, daß es eine Funktion $u_0 \in H^1(\Omega)$ gibt, so daß $a(u_0, v) = F(v)$ für alle $v \in H^1(\Omega)$.

(f) **Zeige**, daß $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ das Problem (R) löst.

(g) **Zeige** die Eindeutigkeit der Lösung in $H^1(\Omega)$.

27. Seien $X \subset Y$ Banachräume, so daß X kompakt in Y eingebettet ist. **Zeige**, daß X in Y stetig eingebettet ist.

28. Sei A eine orthogonale $N \times N$-Matrix und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge, so daß $A\Omega := \{Ax : x \in \Omega\}$ in einem Streifen liegt. **Zeige**, daß es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \right)^{1/p}.$$

Hinweis: Es darf ohne Beweis benutzt werden, daß für $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ die Funktion $v : A\Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch $v(x) := u(A^{-1}x)$ in $W_0^{1,p}(A\Omega)$ liegt.

29. Wir wollen Korollar (3.9) verschärfen. Sei also $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge. **Zeige:** Ist $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ so daß $\nabla u \equiv 0$ auf Ω, dann ist $u \equiv 0$ auf Ω.

Hinweis: Betrachte die Fortsetzung $\tilde{u}$ und benutzt $D_j\tilde{u} = \widetilde{D_j u}$.

30. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ streifenbeschränkt, $f, g_j \in L^2(\Omega)$, $j = 1, \ldots, N$. Dann betrachten wir die Gleichung:

$$(G) \quad -\Delta u = f - \sum_{j=1}^{N} D_j g_j.$$

Definiere was (G) für eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ bedeutet. **Zeige** nun, daß es genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ gibt, welches (G) in dem zuvor definierten Sinne erfüllt.

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 9

31. **Zeige**, daß für $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $u \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ folgende Aussagen äquivalent sind:

$$(1) \qquad \int_{\text{supp}(\varphi)} |\nabla u|^2 \leq \int_{\text{supp}(\varphi)} |\nabla(u+\varphi)|^2 \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

$(2) \qquad \Delta u = 0$ im schwachen Sinne .

<u>Hinweis:</u> Für $x \in \mathbb{R}^N$ ist $|x|^2 = (x,x)_{\mathbb{R}^N}$.

32. Wir wollen folgendes Theorem **(Maximale Regularität für $p = 2$)** zeigen:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge. Ist $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ so daß $-\Delta u = f$, dann ist $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega) := W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$.

(a) **Zeige:** Ist U eine beschränkte und offene Menge im $\mathbb{R}^N$ und $f \in L^2(U)$, dann ist $w := E \star f \in H^2(U)$ und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^N (D_{ij}w)^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f^2.$$

<u>Hinweis:</u> Betrachte $f \in \mathscr{D}(U)$, Theorem 1.8 (Green'sche Formel 2-mal), $\int_B (\Delta w)^2 = \int_B f^2$.

(b) **Zeige** das oben genannte Theorem.
<u>Hinweis:</u> Argumentiere wie im Beweis von Theorem 2.1 der Vorlesung.

33. **WICHTIGE AUFGABE (Der Neumann Laplace Operator)**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und $u \in H^1(\Omega)$ so daß $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Dann sagen wir daß die Normalen-Ableitung $\partial u/\partial n = 0$ auf $\partial\Omega$ (im schwachen Sinne) ist, falls

$$\int_\Omega \Delta u \varphi = -\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

(a) **Zeige:** Ist $\Omega \in C^1$ eine beschränkte offene Menge und $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, so ist $\partial u/\partial n = 0$ im schwachen Sinne genau dann wenn $\partial u/\partial n = 0$ im klassischen Sinne.
<u>Hinweis:</u> Blatt:4, Aufgabe 4, Hinweis 1 / Theorem 4.2 (Fortsetzungseigenschaft) / Theorem 1.8 (Greensche Formel).

(b) **Zeige**, daß für alle $f \in L^2(\Omega)$ und alle $\lambda > 0$ das Problem

$$(\star) \quad \begin{cases} \lambda u - \Delta u = f \text{ in } \Omega \text{ im schwachen Sinne} \\ \partial u/\partial n = 0 \text{ auf } \partial\Omega \text{ im schwachen Sinne} \end{cases}$$

genau eine Lösung $u_0 \in H^1(\Omega)$ besitzt.

<u>Hinweis:</u> Betrachte die in den Übungen vorgestellte Bilinearform a_λ.

(c) **Zeige**, daß für $\lambda > 0$ gilt: $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda^{-1} \|f\|_{L^2(\Omega)}$

(d) **Zeige**, daß es für $\lambda > 0$ eine Konstante $C_\lambda \geq 0$ gibt, so daß $\|u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\lambda \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

(e) **Zeige**: Ist $f \in L^2(\Omega) \cap H^k_{\text{loc}}(\Omega)$ so ist die Lösung $u_0 \in H^{k+2}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 10

34. Erinnerung: Eine Funktion $u \in C(\Omega)$ heißt nach Definition (3.1) *schwach subharmonisch* in Ω, falls $-\int u\Delta\varphi \leq 0$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)_+$. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ nennen wir *subharmonisch*, falls für die stetige Funktion $v := -\Delta u$ gilt: $v(x) \leq 0$ für alle $x \in \Omega$. **Zeige**, daß eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ genau dann subharmonisch ist, wenn sie schwach subharmonisch ist.

35. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene und beschränkte Menge und sei u eine beschränkte harmonische Funktion in Ω.

(a) **Zeige**, daß für jede Kugel $B = \mathscr{B}(y,r) \subset\subset \Omega$ und $j = 1,\ldots,N$ gilt:

$$\left|D_j u(y)\right| \leq \frac{N}{r} \sup_{\partial B} |u|.$$

<u>Hinweis:</u> Benutze: $D_j u$ ist harmonisch, die MWE für harmonische Funktionen und die partielle Integration.

(b) **Zeige**: Ist $K \subset \Omega$ eine kompakte Menge und α ein Multiindex, so gilt:

$$\sup_K |D^\alpha u| \leq \left(\frac{N|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_\Omega |u|,$$

wobei $d := \mathrm{dist}(K, \partial\Omega) > 0$.

36. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene und beschränkte Menge welche die äußere Segmenteigenschaft erfüllt, d.h. zu jedem $z \in \partial\Omega$ gibt es ein $x_0 \in \Omega^c$, so daß $\lambda x_0 + (1-\lambda)z \in \Omega^c$ für alle $\lambda \in [0,1]$. **Zeige**, daß Ω Dirichlet regulär ist.

<u>Hinweis:</u> Durch Verschiebung und Drehung können wir o.B.d.A. annehmen, daß $z = (0,0)$ und $x_0 = (-r,0)$ mit $r > 0$. Zeige, daß $b(r,\theta) := -\log(r) \cdot \left[\theta^2 + (\log(r))^2\right]^{-1}$ eine Barriere ist.

37. Wir betrachten im $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ für $L,h > 0$ den offenen Kegel $K_{L,h}$ gegeben durch

$$K_{L,h} := \left\{x \in \mathbb{R}^N : h > x_N > L\left|x'\right|\right\},$$

wobei $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ gegeben ist durch $x' := (x_1,\ldots,x_{N-1})$. **Zeige**, daß jede beschränkte und offene Lipschitz-Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ die gleichmäßige äußere Kegeleigenschaft hat, d.h. es gibt Konstanten $L,h > 0$, so daß es für jedes $z \in \partial\Omega$ einen zu $K_{L,h}$ kongruenten Kegel K_z gibt, so daß $\overline{K_z} \cap \overline{\Omega} = \{z\}$.

<u>Hinweis:</u> Zwei Mengen im $\mathbb{R}^N$ heißen kongruent, falls eine dieser Mengen durch Verschiebung, Drehung und Spiegelung in die andere überführt werden kann. Wir können durch Drehung und Verschiebung o.B.d.A. annehmen, daß $z = 0$ und $K_z = K_{L,h}$. Man beachte hierbei aber, daß die Konstanten $L,h > 0$ nicht nur von einem Randpunkt $z = 0$ abhängen, sondern für den gesamten Rand gültig sei müssen.

38. Der Schnitt und die Vereinigung Dirichlet regulärer Mengen.

(a) **Zeige**, daß der nicht-leere Schnitt zweier Dirichlet regulärer Mengen (im $\mathbb{R}^N$) wieder Dirichlet regulär ist.

(b) **Finde** ein Beispiel, wo die Vereinigung zweier Dirichlet regulärer Mengen nicht Dirichlet regulär ist.
<u>Hinweis:</u> Siehe Aufgabe 3, Blatt:1 sowie obige Aufgabe 36.

(c) **Zeige**, daß die endliche und disjunkte Vereinigung Dirichlet regulärer Mengen wieder Dirichlet regulär ist.

39. **Finde** eine offene und beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, welche die äußere Segmenteigenschaft nicht hat aber dennoch Dirichlet regulär ist.
Hinweis: Benutze Aufgabe 38c.

40. Sei $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1\}$. **Zeige**, daß es eine Funktion $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ gibt, so daß

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

aber $u(x,y) > 0$ auf Ω.

Hinweis: Versuche eine solche Funktion der Gesalt $u(x,y) = f(x)g(y)$ zu finden.

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 11

41. Wir betrachten für offene Mengen im $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ die Eigenschaften:

- die äußere Segmenteigenschaft (OSP),
- die äußere Kegeleigenschaft (OCP),
- die äußere Kugeleigenschaft (OBP) und
- die Dirichlet Regularität (DR).

Skizziere zum Verständnis nun graphisch deren Inklusion und finde offene Mengen (Beispiele aus der Vorlesung bzw. den Übungen sind zulässig), welche gewisse Eigenschaften besitzen und die anderen nicht besitzen, z.B. $\Omega \in \mathrm{OSP} \cap \mathrm{DR} \cap \mathrm{OCP}^c \cap \mathrm{OBP}^c$.

42. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt. Dann betrachten wir folgende Aussagen:

1. Für alle $f \in C(\overline{\Omega})$ gibt es ein $u \in C_0(\Omega)$, so daß $-\Delta u = f$.
2. Ω ist Dirichlet regulär.

In der Vorlesung, Satz 3.7, haben wir gesehen, daß (2)⇒(1). **Zeige**, daß (1)⇒(2).

43. Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ eine nicht-negative Funktion und seien $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$ beschränkte offene Mengen. Mit u_1 und u_2 bezeichnen wir die Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u_j = f & \text{in } \Omega_j, \\ u_j \in H_0^1(\Omega_j). \end{cases}$$

Zeige, daß $u_1 \leq u_2$ f.ü. auf Ω_2, wobei wir u_1 mit 0 außerhalb Ω_1 fortgesetzt denken.

Wir wollen nun eine weitere Characterisierung der Dirichlet regulären Mengen angeben.

44. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und seien $\Omega_n \subset \mathbb{R}^N$ Dirichlet reguläre Mengen. Dabei sei Ω beschränkt, $\Omega_n \subset \Omega_{n+1} \subset\subset \Omega$ und $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$. Für $U \subset \mathbb{R}^N$ offen betrachten wir im Folgenden den Raum $C_0(U)$ als Unterraum von $C(\mathbb{R}^N)$ indem wir die Funktion durch Null fortsetzen [analog zu $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$]. Nach Satz 3.7 gibt es für jedes $f \in C(\overline{\Omega})$ genau eine Funktion $u_k \in C_0(\Omega_k)$, so daß $-\Delta u_k = f$. Diese bezeichnen wir mit $R_k f := u_k$. **Zeige**, daß folgende Aussagen äquivalent sind

1. Ω ist Dirichlet regulär.
2. Für jedes $f \in C(\overline{\Omega})$ ist $(R_k f)_k$ eine Cauchyfolge in $C^b(\mathbb{R}^N)$.

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Biegert
SS 2005

Gesamt: 20 Punkte

Abgabetermin: Do. 07.07.2005

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 12

45. **Finde** eine beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$, so daß es keinen Spuroperator $T : H^1(\Omega) \to L^\infty(\partial\Omega)$ gibt, d.h. so daß es keinen linearen und stetigen Operator $T : H^1(\Omega) \to L^\infty(\partial\Omega)$ gibt mit $Tu = u$ auf $\partial\Omega$ für alle $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

46. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $u \in C^1([a,b])$.

(a) **Zeige**, daß für $p > 1$ im klassischen Sinne gilt: $(|u|^p)' = p|u|^{p-1}\mathrm{sgn}(u) \cdot u'$ und **folgere**, daß $|u|^p \in C^1([a,b])$.

(b) **Zeige**, daß für $p = 1$ gilt: $|u|^p \in W^{1,\infty}((a,b))$.

47. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene und beschränkte Menge mit C^1-Rand, $f \in L^2(\Omega)$ und $b \in L^2(\partial\Omega)$ seinen nicht-positive Funktionen und $u \in H^1(\Omega)$ erfülle $u - \Delta u = f$ und $\partial u / \partial \nu = b$. **Zeige**, daß $u \le 0$ auf Ω ist.

48. Sei $\Omega := \mathscr{B}(0,1) \setminus ([0,1] \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ eine aufgeschlitzte Kreisscheibe. Zeige, daß es Funktionen $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ gibt, welche nicht Hölder-stetig mit einem Exponenten $\gamma \in (0,1]$ sind, d.h. es gibt keine Konstante $C > 0$, so daß $|u(x) - u(y)| \le C|x-y|^\gamma$ für alle $x, y \in \Omega$.

49. **Zeige** die folgenden (einfachen) Konsequenzen aus dem Spursatz. Dabei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine beschränkte offene Menge mit C^1-Rand, $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$ und $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ der Spuroperator.

1. $T(u^+) = (Tu)^+$.
2. $T(u \wedge v) = (Tu) \wedge (Tv)$.
3. Ist $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, so ist $Tu = 0$.

50. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine beschränkte Lipschitz-Menge. Zeige, daß die Einbettung $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ kompakt ist.
Hinweis: Benutze die Fortsetzungseigenschaft !

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 13

51. (Interpolationsungleichung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene (nicht unbedingt beschränkte) Menge. Seien $1 \le p \le r \le q \le \infty$ reelle Zahlen. **Zeige**, daß für jede Funktion $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \le \|u\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \, \|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)},$$

wobei $\alpha \in [0,1]$ so gewählt sei, daß $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

Hinweis: Hölder-Ungleichung und begründen, warum $\alpha \in (0,1)$ gewählt werden kann.

52. Seien $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, so daß $kp > N$ und $N/p \notin \mathbb{N}$. **Zeige**:

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{k-[N/p]-1,\alpha}(\mathbb{R}^N),$$

wobei $\alpha := 1 + [N/p] - N/p$ ist.

Hinweis: Vergleiche den Beweis von Korollar (3.3) (a) und (b)! Zeige zunächst den Fall $k - [N/p] = 1$ und führe den allgemeinen Fall auf diesen zurück.

53. Zeige, daß für $1 \le p \le \infty$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall eine Konstante $C > 0$ existiert, so daß gilt:

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \le C \|u\|_{W^{1,p}(K)} \qquad \forall u \in W^{1,p}(I).$$

Hinweis: Starte mit dem Fall $I = \mathbb{R}$, $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ und $1 < p < \infty$. Beachte die Hinweise aus der Vorlesung: Fortsetzungsoperator E, Hölder-Ungleichung, usw.

54. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene und beschränkte Lipschitz-Menge und $N < p \le \infty$. Zeige, daß

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega}),$$

d.h. daß $W^{1,p}(\Omega)$ kompakt in $C(\overline{\Omega})$ eingebettet ist.

Hinweis: Korollar (3.2) und der Satz von Arzelà-Ascoli.