Übungen zu PDE
Sommersemester 2006.

Inhaltsverzeichnis

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 1

1. *Löse* folgende inhomogene Transportgleichung: [3]

$$\begin{cases} u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \\ 2u_t + 3u_x = \cos(x) \\ u(0,x) = (2/3)\sin(x). \end{cases}$$

2. Für $u_0 \in C(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Transportgleichung

$$\begin{cases} u_t(t,x) + bu_x(t,x) = 0 & \text{für } t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

Wir nennen eine stetige Funktion $u \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ eine *schwache Lösung* des obigen Problems, falls

$$x \mapsto \int_0^t u(s,x)\, ds$$

für jedes $t \geq 0$ eine differenzierbare Funktion ist und

$$u(t,x) = u_0(x) - b\frac{d}{dx}\int_0^t u(s,x)\, ds$$

für $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

(a) *Zeige*, daß jede klassische Lösung auch eine schwache Lösung ist. [1]

(b) *Zeige*: Zu jedem $u_0 \in C(\mathbb{R})$ gibt es genau eine schwache Lösung. [2]

(c) *Bestimme* zu $u_0 \in C(\mathbb{R})$ die schwache Lösung der Transportgleichung. [1]

3. Für $0 < r < R < \infty$ betrachten wir den Kreisring $\Omega := B(0,r,R) := \{x \in \mathbb{R}^2 : r < |x| < R\}$.

(a) *Zeige*, daß die Funktionen $f(x) := \ln(|x|)$ und $g(x) := 1$ auf Ω harmonisch sind. [1]

(b) *Zeige*, daß es für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ genau eine Funktion $u \in C(\overline{\Omega})$ gibt, so daß [2]

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u(x) = \alpha & \text{für } |x| = r, \\ u(x) = \beta & \text{für } |x| = R. \end{cases}$$

Berechne nun diese Funktion in Abhängigkeit von α und β.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. Markus Biegert
SS 2006

Gesamt: 20 Punkte

Abgabetermin: Di, 09.05.2006

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 2

4. (Subharmonische Funktionen) [2]
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge. *Zeige:* Ist $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ subharmonisch in Ω und $h \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ harmonisch in Ω und gilt $u \leq h$ auf $\partial\Omega$, so ist $u \leq h$ auf $\overline{\Omega}$.

5. (Dirichlet Regularität) [4]
Sei $\Omega := \mathscr{B}(0,1)$ die offene Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$. In der Vorlesung haben wir gesehen, daß es für jede stetige Funktion $\varphi \in C(\partial\Omega)$ eine Funktion $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ gibt, welche in Ω harmonisch und auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω gleich φ ist. *Zeige*, daß $\Omega := \mathscr{B}(0,1) \setminus \{0\}$ nicht die oben genannte Eigenschaft besitzt. Hinweis: Benutze die Rotations-Invarianz für harmonische Funktionen und Aufgabe 3, Blatt:1.

6. (Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet Randbedingungen) [4]
Wir betrachten für $u_0 \in C_0([0,\pi])$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & t > 0,\ x \in (0,\pi), & \text{Differentialgleichung (DGL)} \\ u(t,x) = 0 & x \in \{0,\pi\},\ t > 0, & \text{Randbedingungen (RB)} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in [0,\pi], & \text{Anfangswert (AW).} \end{cases}$$

Sei $u \in C([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^\infty((0,\infty),[0,\pi])$ die nach Theorem 3.4 eindeutige Lösung der obigen WLG. *Zeige:*

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(t,\cdot) \to 0 \text{ in } C([0,\pi]) \text{ für } t \to \infty.$$

7. (Wärmeleitungsgleichung mit Neumann Randbedingungen)
Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & t > 0,\ x \in (0,\pi), & \text{Differentialgleichung (DGL)} \\ u_x(t,x) = 0 & x \in \{0,\pi\},\ t > 0, & \text{Randbedingungen (RB)} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in [0,\pi], & \text{Anfangswert (AW).} \end{cases}$$

(a) *Zeige*, daß U_n für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben durch [1]

$$U_n(x,t) := e^{-n^2 t}\cos(nx)$$

die Eigenschaften (DGL) und (RB) erfüllen.

(b) Sei $u_0 \in C^2[0,\pi]$ mit $u_0'(0) = u_0'(\pi) = 0$. *Bestimme* geeignete Konstanten a_n, $(n \in \mathbb{N}_0)$, so daß die Funktion u gegeben durch [5]

$$u(t,x) := \frac{a_0}{2}U_0(t,x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(t,x)$$

in $C([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^\infty((0,\infty) \times [0,\pi])$ liegt und eine Lösung des obigen Problems ist.

(c) Sei $u \in C([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^1((0,\infty) \times [0,\pi])$ eine Lösung der obigen WLG. Die Gesamtwärme $\mathscr{W}(t)$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ sei gegeben durch $\mathscr{W}(t) := \int_0^\pi u(t,x)\,dx$. *Zeige*, daß $\mathscr{W}(\cdot) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ konstant ist. Hinweis: Berechne $d\mathscr{W}/dt$. [2]

(d) *Zeige*, daß es für jedes $u_0 \in C([0,\pi])$ höchstens eine Lösung [2]

$$u \in C([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^1((0,\infty) \times [0,\pi])$$

gibt. Hinweis: Betrachte die Energie $\mathscr{E}(t) := \frac{1}{2}\int_0^\pi u(t,x)^2\,dx$.

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/pde

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. Markus Biegert
SS 2006

Gesamt: 23 Punkte

Abgabetermin: Di, 16.05.2006

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 3

8. (Die Gaussfunktion und der Gausskern)

(a) Wir betrachten die Gaussfunktion v gegeben durch [3]

$$v : (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \qquad (t,x) \mapsto \frac{1}{t^{N/2}} e^{-|x|^2/(4t)}.$$

Zeige: $v_t = \Delta_x v$ in $(0,\infty) \times \mathbb{R}^N$.

(b) Wir betrachten den Gausskern g im $\mathbb{R}^N$ gegeben durch [2]

$$g : (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \qquad (t,x,y) \mapsto \frac{1}{(4\pi)^{N/2}} v(t,x-y).$$

Zeige: $g_t = \Delta_x g$ in $(0,\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

(c) *Bestimme* eine Funktion $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R})$ so daß [3]

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \text{ für } t,x > 0; \\ \lim\limits_{t\to 0+} u(t,x) = \frac{1+\operatorname{sgn}(x)}{2} \text{ für festes } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

<u>Definition:</u> $\operatorname{sgn}(x) := 1$ falls $x > 0$, $\operatorname{sgn}(0) := 0$ und $\operatorname{sgn}(x) := -1$ für $x < 0$.

9. (Maximum-Prinzip für die Wärmeleitungsgleichung in Ω) [8]

Zeige: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und für $\tau > 0$ sei $\Omega_\tau := (0,\tau) \times \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Ist $u \in C(\overline{\Omega}_\tau) \cap C^{1,2}(\Omega_\tau)$ so daß $u_t = \Delta u$ in Ω_τ und $|u(t,x)| \le Ae^{a|x|^2}$ in Ω_τ, dann gilt

$$\max_{\overline{\Omega}_\tau} u = \max_{\partial^\star \Omega_\tau} u,$$

wobei $\partial^\star \Omega_\tau := \{(t,x) \in \overline{\Omega}_\tau : t = 0 \text{ oder } x \in \partial\Omega\}$ den parabolischen Rand von Ω_τ bezeichnet.

<u>Hinweis:</u> Modifiziere den Beweis des Maximum-Prinzips für die WLG im $\mathbb{R}^N$.

10. (Approximation der Dirac-Distribution) [3]

Seien $v_m \in L^1(\mathbb{R}^N)_+ := \{v \in L^1(\mathbb{R}^N) : v \ge 0 \text{ f.ü.}\}$ so daß

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_m(y)\, dy = 1 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{supp}(v_m) \subset \mathscr{B}(y_0, 1/m).$$

Für diese Folge setzen wir

$$u_m(t,x) := \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x-y|^2/(4t)} v_m(y)\, dy.$$

Zeige, daß für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^N$ fest gilt: $u_m(t,x) \to \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-|x-y_0|^2/(4t)}$ für $m \to \infty$.

11. (Das Cauchy-Problem auf $\Omega = (0,\infty)$ mit Neumann-Randbedingungen) [4]

Bestimme zu $u_0 \in C^b([0,\infty)) := \{u \in C([0,\infty)) : \sup_{x\ge 0} |u(x)| < \infty\}$ eine Lösung u von

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}_+^2) \cap C^{1,2}((0,\infty) \times [0,\infty)) & \textbf{(Regularität)} \\ u_t = u_{xx} \text{ für } t,x > 0 & \textbf{(DGL)} \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ für } x \in [0,\infty) & \textbf{(AWB)} \\ u_x(t,0) = 0 \text{ für } t > 0 & \textbf{(RB)} \end{cases}$$

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/pde

UNIVERSITÄT ULM

Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. Markus Biegert
SS 2006

Gesamt: 20 Punkte

Abgabetermin: Di, 23.05.2006

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 4

12. (Sobolev-Funktionen mit Ableitung Null sind konstant)

Sei $I := (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

(a) Sei $\psi \in \mathscr{D}(I)$ so daß $\int_a^b \psi(y)\, dy = 0$. *Zeige*, daß es genau ein $\varphi \in \mathscr{D}(I)$ gibt mit $\psi = \varphi'$.

(b) Sei $\varphi \in \mathscr{D}(I)$ und

$$\psi(x) := \varphi(x) - \int_a^b \varphi(y)\, dy \cdot \rho(x),$$

wobei $\rho \in \mathscr{D}(I)$ ist mit $\int_a^b \rho(y)\, dy = 1$. *Zeige*: Es gibt $\psi_1 \in \mathscr{D}(I)$ mit $\psi_1' = \psi$.

(c) Sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ mit $u' = 0$, d.h.

$$\int_a^b u\varphi'\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(I).$$

Zeige: $u(x) = c$ f.ü. in I.
Hinweis: Benutze (b) und Lemma (8.1) der Vorlesung.

13. (a) **(Existenz einer schwachen Stammfunktion)**

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. *Zeige*: Die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t)\, dt$$

ist in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(I) \cap C(I)$ und $F' = f$ im schwachen Sinn.

(b) **(Characterisierung des ersten Sobolevraumes auf einem Intervall)**

Sei $I = (a,b)$ ein beschränktes offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $p \in [1,\infty]$. *Zeige*, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

1. $u \in W^{1,p}(I) := \{u \in L^p(I) : u' \in L^p(I)\}$.
2. $u \in C([a,b])$ und es gibt $g \in L^p(I)$ so daß

$$u(x) = u(a) + \int_a^x g(y)\, dy.$$

Bemerkung: Ein $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ist in $C(\overline{\Omega})$ falls es ein $\tilde{u} \in C(\overline{\Omega})$ gibt, so daß $u = \tilde{u}$ f.ü. in Ω.

(c) **(Hebbarkeit von Singularitäten)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen und $x_0 \in \Omega$. *Zeige*: Ist $u \in W^{1,1}(\Omega \setminus \{x_0\}) \cap C(\Omega)$, dann ist $u \in W^{1,1}(\Omega)$.

14. (Die Helmholtz-Gleichung)

Zeige: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge, $f \in L^2(\Omega)$ und $\lambda > 0$. Dann gibt es genau ein $u \in H^1_0(\Omega)$ mit

$$\lambda u - \Delta u = f.$$

Hinweis: Benutze den Satz von Riesz-Fréchet.

15. (Die Poincaré-Ungleichung gilt nicht im $\mathbb{R}^N$)

Zeige daß die Pincaré-Ungleichung im $\mathbb{R}^N$ nicht gilt, d.h. *zeige*, daß es keine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle $u \in H^1_0(\mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Hinweis: Betrachte eine Funktion $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ und dazu Funktionen $\varphi_n(x) := \varphi(x/n)$.

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/pde

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. Markus Biegert
SS 2006

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 5

16. (Characterisierung (schwach)-harmonischer Funktionen)
Zeige, daß für $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $u \in H^1_{\text{loc}}(\Omega) := W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ folgende Aussagen äquivalent sind:

$$(1) \qquad \int_{\text{supp}(\varphi)} |\nabla u|^2 \leq \int_{\text{supp}(\varphi)} |\nabla(u+\varphi)|^2 \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

$$(2) \qquad \Delta u = 0 \text{ im schwachen Sinne .}$$

17. (Orthonormalbasis aus Eigenvektoren des Dirichlet Laplace Operators)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene und beschränkte Menge und sei $Rf \in H^1_0(\Omega)$ die Lösung von

$$\begin{cases} u \in H^1_0(\Omega) \\ -\Delta u = f. \end{cases}$$

Nach Vorlesung gibt es eine ONB $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ und $\mu_k > 0$, so daß $Re_k = \mu_k e_k$. Wir setzen $\lambda_k := 1/\mu_k$.

(a) *Zeige*: Ist $u \in H^1_0(\Omega)$, $u \neq 0$ und $-\Delta u = \lambda u$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\lambda = \lambda_k$.

(b) *Zeige*: Ist $u \in H^1_0(\Omega)$ und $\Delta u \in L^2(\Omega)$, so ist $(\lambda_k (u|e_k)_{L^2(\Omega)})_k \in l^2$.

(c) Sei $u_0 \in L^2(\Omega)$. *Zeige*, daß $\lim\limits_{t\to 0+} u(t) = u_0$ in $L^2(\Omega)$ wobei u gegeben ist durch

$$u(t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} (u_0|e_k)_{L^2(\Omega)} e_k.$$

18. (Laplace Operator mit Robin-Randbedingungen)
Sei $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und α, β nicht-negative Konstanten mit $\alpha + \beta > 0$. Dann wollen wir zeigen, daß es für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Funktion $u \in C^1(\overline{\Omega})$ gibt, so daß gilt:

$$\text{(R)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{(im schwachen Sinne)} \\ \alpha u(0) - u'(0) = 0 \\ \beta u(1) + u'(1) = 0. \end{cases}$$

(a) *Zeige*, daß die Einbettung $H^1(\Omega)$ in $C(\overline{\Omega})$ stetig ist.

(b) Seien $a < b$ reelle Zahlen und $u, v \in H^1((a,b))$. *Zeige* die *partielle Integration*, d.h. daß

$$\int_a^b u'v = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b uv'.$$

<u>Hinweis:</u> Benutze, daß für $u, v \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ gilt: $(uv)' = u'v + uv'$.

(c) Sei $V := H^1(\Omega)$. Dann betrachten wir die bilineare Abbildung $a : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$a(u,v) := \int_\Omega u'(x)v'(x)\,dx + \alpha u(0)v(0) + \beta u(1)v(1).$$

(i) *Zeige*: a ist stetig, d.h. $\exists M > 0$ so daß $|a(u,v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$, $\forall u, v \in V$.

(ii) *Zeige*, daß a koerziv ist, also daß $a(u,u) \geq \mathfrak{a} \|u\|^2_V$, $\forall u \in V$ mit $\mathfrak{a} > 0$.

(d) *Zeige*, daß $F : V \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(v) := \int_\Omega fv$ linear und stetig ist, d.h. daß $F \in V'$ ist.

(e) *Folgere*, daß es eine Funktion $u_0 \in H^1(\Omega)$ gibt, so daß $a(u_0, v) = F(v)$ für alle $v \in H^1(\Omega)$.

(f) *Zeige*, daß $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ die eindeutige Lösung in $H^1(\Omega)$ des Problem (R) ist.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Abgabetermin: Di, 06.06.2006

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. Markus Biegert
SS 2006

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 6

19. (L^2-elliptische Formen)
Für $b, a_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ und $w \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Abbildung $a_w : H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$a_w(u,v) := \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v - \int_{\mathbb{R}^N} b \nabla u v - \int_{\mathbb{R}^N} a_0 uv + w \int_{\mathbb{R}^N} uv.$$

(a) *Zeige*, daß a_w bilinear und stetig ist.

(b) *Zeige*, daß für $w > \|b\|_\infty^2/4 + \|a_0\|_\infty =: w_0$ die From a_w koerziv ist.

(c) *Zeige*, daß es für $w > w_0$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ genau eine Funktion $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$ gibt mit

$$-\Delta u - b\nabla u - a_0 u + wu = f \qquad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N).$$

20. (Keine kompakte Einbettung von $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$)

(a) Sei $\Omega = \mathbb{R}^N$. *Zeige*, daß die Einbettung $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ nicht kompakt ist.
Hinweis: Betrachte $u_n \in H^1(\Omega)$ mit $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = C_1$ und $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} = C_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine beschränkte Menge welche die Vereinigung unendlich vieler disjunkter offener Mengen ist. *Zeige*, daß die Einbettung von $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ nicht kompakt ist.
Hinweis: Betrachte zunächst $\Omega \subset (0,1) \subset \mathbb{R}$ und $u_n \in H^1(\Omega)$ mit $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = \|u_n\|_{H^1(\Omega)} = C_3$.

21. (Tangentialräume und die Äußere Normale)
Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ der Klasse C^1 und ein $z \in \partial\Omega$ bezeichnen wir mit $T_z(\partial\Omega)$ den Tangential-Raum von $\partial\Omega$ in z und mit $\nu_\Omega(z)$ die äußere Normale von Ω in z. Sei $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine invertierbare Matrix, $b \in \mathbb{R}^N$ und $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ gegeben durch $\Phi(x) := Bx + b$. Wir setzen $\widetilde{\Omega} := \Phi(\Omega)$ und $\tilde{z} := \Phi(z) \in \partial\widetilde{\Omega}$.

(a) *Zeige*: $T_z(\Omega) = B^{-1}T_{\tilde{z}}(\widetilde{\Omega})$.

(b) *Zeige*: Ist B orthogonal, so ist $\nu_\Omega(z) = B^{-1}\nu_{\widetilde{\Omega}}(\tilde{z})$.

22. (Greensche Formeln $\rightarrow$ Kugeloberfläche versus Kugelvolumen)
Sei $\Omega_r := B(0,r) \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, σ_r das Oberflächenmaß auf $\partial\Omega_r$ und $u(x) := |x|$.

(a) *Zeige*: $N\lambda_N(\Omega_r) = r\sigma_r(\partial\Omega_r)$, wobei λ_N das N-dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet.
Hinweis: Für $v(x) := |x|^2/2$ betrachte man $\int_{\Omega_r} \Delta v(x)\, dx$.

(b) *Zeige*: $\sigma_r(\partial\Omega_r) = Nr^{N-1}\lambda_N(\Omega_1)$.

(c) *Berechne* Δu in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. Markus Biegert
SS 2006

Abgabetermin: Di, 13.06.2006

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 7

23. (Konsequenzen aus der Hölder-Ungleichung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene und beschränkte Menge.

(a) *Zeige*: $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ falls $1 \leq q < p \leq \infty$ und es gilt:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \cdot \|u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in L^p(\Omega)$$

mit einer von u unabhängigen Konstanten C.

(b) *Zeige*: $W^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,q}(\Omega)$ falls $1 \leq q < p \leq \infty$ und es gilt:

$$\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

mit einer von u unabhängigen Konstanten C.

24. (Sobolev-Funktionen mit Singularitäten)
Wir betrachten die Funktion $f(x) := |x|^\alpha$ die bis auf evtl. den Ursprung wohldefiniert ist. *Bestimme* nun die Paare $(\alpha, p) \in \mathbb{R} \times [1, \infty)$ (in Abhängigkeit der Dimension N) für welche gilt:

$$f \in W^{1,p}(\mathscr{B}(0,1)),$$

wobei $\mathscr{B}(0,1)$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^N$ bezeichnet.

25. (Die zweite Poincaré-Ungleichung)
Wir sagen eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ erfüllt die zweite Poincaré-Ungleichung, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß

$$\|u - u_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1(\Omega),$$

wobei $u_\Omega := \lim_{R \to \infty} |\Omega_R|^{-1} \int_{\Omega_R} u(x)\, dx \in \mathbb{R}$ und $\Omega_R := \Omega \cap B(0,R)$.

(a) Zeige, daß es für $\Omega := \mathbb{R}$ keine Konstante $C > 0$ gibt, so daß

$$\|u - u_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1(\Omega).$$

(b) Zeige, daß es für $\Omega := \mathbb{R} \times (0,1)$ (=Streifengebiet) keine Konstante $C > 0$ gibt, so daß

$$\|u - u_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Hinweis: Was ist u_Ω für $u \in L^2(\Omega)$ wenn $|\Omega| = \infty$?

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 8

26. (Der Neumann Laplace-Operator)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und $\lambda > 0$. Dann betrachten wir die Abbildung $R_\lambda : L^2(\Omega) \to H^1(\Omega)$ welche jedem $f \in L^2(\Omega)$ die eindeutige schwache Lösung (siehe §15) von

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \partial u / \partial \nu = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

zuordnet. *Zeige*, daß R_λ stetig ist, d.h. daß es eine Konstante $C_\lambda > 0$ gibt, so daß

$$\|R_\lambda f\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\lambda \|f\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall f \in L^2(\Omega).$$

27. (Regularisierung von L^1_{loc}-Funktionen: Beweis von Satz 17.6 der Vorlesung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. *Zeige*, daß $f_\alpha := f \star \rho_\alpha \to f$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für $\alpha \to 0+$.
Hinweis: Benutze daß $C(W) \cap L^1(W)$ dicht in $L^1(W)$ ist und wende Satz 17.4 der Vorlesung passend an.

28. (Ein Teil des Beweises von Satz 17.9 der Vorlesung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge, $B(x_0, r) \subset \Omega$, $v \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$. Es gelte

$$u(y) = u(x) + \int_0^1 \sum_{j=1}^N v_j(x + t(y - x))(y_j - x_j)\, dt$$

für alle $x, y \in B(x_0, r) \subset \Omega$. *Zeige*, daß $u \in C^1(B(x_0, r))$ und $D_j u(y) = v_j(y)$ für alle $y \in B(x_0, r)$.

29. (Klassische und schwache Ableitungen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge.

(a) *Zeige:* Ist $u \in W^{k,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $D^\alpha u \in C(\Omega)$ wenn $|\alpha| = k$, so ist $u \in C^k(\Omega)$.

(b) *Zeige:* Ist $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla u = 0$ f.ü. und Ω zusammenhängend, so ist $u = c$ f.ü.

30. (Weitere Konsequenzen aus der Hölder-Ungleichung)
Sei $1 \leq p \leq q \leq \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine (möglicherweise unbeschränkte) offene Menge. *Zeige*:

$$L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Hinweis: Vergleiche Aufgabe 23.

31. (Partielle Ableitungen harmonischer Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene und beschränkte Menge und sei u eine beschränkte harmonische Funktion in Ω.

(a) *Zeige*, daß für jede Kugel $B = B(y, r) \subset\subset \Omega$ und $j = 1, \ldots, N$ gilt:

$$\left|D_j u(y)\right| \leq \frac{N}{r} \sup_{\partial B} |u|.$$

Hinweis: Aus Aufgabe (22b) erhält man die Konstante N/r.

(b) *Zeige*: Ist $K \subset \Omega$ eine kompakte Menge und α ein Multiindex, so gilt:

$$\sup_K |D^\alpha u| \leq \left(\frac{N|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_\Omega |u|,$$

wobei $d := \operatorname{dist}(K, \partial\Omega) > 0$.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. Markus Biegert
SS 2006

Gesamt: 20 Punkte

Abgabetermin: Di, 27.06.2006

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 9

32. (Anwendung: Green'sche Formeln und Young-Ungleichung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene und beschränkte Menge der Klasse C^1. **Zeige**, daß für jedes $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C_0(\Omega)$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt: [5]

$$2\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \le \varepsilon \int_\Omega (\Delta u)^2\, dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega u^2\, dx.$$

33. (Eigenschaften spezieller Funktionen)
Sei u eine auf $\mathbb{R}^N$ stetige Funktion und sei $x \in \mathbb{R}^N$ fest.

(a) *Zeige*, daß die Funktion $R : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ stetig ist, wobei $\mathbb{R}_+^\star = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ und R gegeben ist durch

$$R(r) := \int_{\partial B(x,r)} u(z)\, d\sigma(z).$$

(b) Wir betrachten die Funktion $V : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$V(r) := \int_{B(x,r)} u(y)\, dy.$$

Zeige, daß die Funktion V differenzierbar ist und daß gilt: $V'(r) = R(r)$ für alle $r \geq 0$.

34. (Schwach harmonische Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge.

(a) *Zeige:* Ist $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ so daß für jedes $r > 0$ gilt:

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)\, dy \qquad \text{f.ü. in } \Omega_r := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\} > 2r,$$

dann gibt es eine in Ω harmonische Funktion h mit $h = u$ f.ü. in Ω.

(b) *Zeige:* Ist $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ der Grenzwert in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ von in Ω harmonischen Funktionen u_n, dann gibt es eine in Ω harmonische Funktion h mit $h = u$ f.ü. in Ω.

35. (Das Newtonsche Potential)
Sei E_N das Newtonsche Potential im $\mathbb{R}^N$: $E_2(x) = \log|x|/(2\pi)$ und $E_N(x) = [(2-N)\sigma_N]^{-1}|x|^{2-N}$ für $N \geq 3$.

(a) *Zeige* daß für $i = 1, 2$ gilt:

$$D_i D_i E_2 \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2).$$

(b) *Zeige:* Ist $N \geq 2$, dann ist $\nabla E_N \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ genau dann, wenn $q < N/(N-1)$.

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. Markus Biegert
SS 2006

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 10

36. (Innere Regularität der Poissongleichung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. *Zeige:* Ist $p > N$ und $-\Delta u = f$, dann ist $u \in C^2(\Omega)$.

37. (Sobolevscher Einbettungssatz)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge. *Zeige:* $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega) \subset C(\Omega)$ für $p > N$.
<u>Hinweis:</u> Aufgabe (36) kann hilfreich sein.

38. (Stetigkeit einer Abbildung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $w \in H^1(\Omega)$. *Zeige*, daß die Abbildung $S_w : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$, $u \mapsto u \wedge w$, stetig ist.

39. (Eigenschaften von $H^1_0(\Omega)$)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge.

(a) *Zeige:* $H^1(\Omega) \cap L^2_c(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$.

(b) *Zeige:* Sind $u \in H^1_0(\Omega)$ und $v \in H^1(\Omega)$ mit $0 \leq v \leq u$, so ist $v \in H^1_0(\Omega)$.

(c) *Zeige:* Sind $u \in H^1_0(\Omega)$ und $v \in H^1(\Omega)$ mit $|v| \leq u$, so ist $v \in H^1_0(\Omega)$.

40. (Segmenteigenschaft und Dirichlet Regularität)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene und beschränkte Menge welche die äußere Segmenteigenschaft erfüllt, d.h. zu jedem $z \in \partial\Omega$ gibt es ein $x_0 \in \Omega^c$, so daß $\lambda x_0 + (1-\lambda)z \in \Omega^c$ für alle $\lambda \in [0,1]$. *Zeige*, daß Ω Dirichlet regulär ist.

<u>Hinweis:</u> Durch Verschiebung und Drehung können wir o.B.d.A. annehmen, daß $z = (0,0)$ und $x_0 = (-r,0)$ mit $r > 0$. Zeige, daß $b(r,\theta) := -\log(r) \cdot \left[\theta^2 + (\log(r))^2\right]^{-1}$ eine H^1-Barriere ist und benutze Satz 23.4 der Vorlesung.

41. (Schnitt und Vereinigung Dirichlet regulärer Mengen)

(a) *Zeige*, daß der nicht-leere Schnitt zweier Dirichlet regulärer Mengen (im $\mathbb{R}^N$) wiederum Dirichlet regulär ist.

(b) *Zeige* anhand eines Beispiels im $\mathbb{R}^2$, daß die Vereinigung zweier Dirichlet regulärer Mengen nicht wieder Dirichlet regulär sein muß.

(c) *Zeige*, daß die endliche und disjunkte Vereinigung Dirichlet regulärer Mengen wiederum Dirichlet regulär ist.

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 11

42. (Maximum-Prinzip für stetige, subharmonische Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene und beschränkte Menge und sei $u \in C(\overline{\Omega})$ so daß $-\Delta u \leq 0$. *Zeige*, daß

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Hinweis: Nehme an, daß $m := \max_{\overline{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u$. Betrachte die kompakte Menge $K := \{x \in \Omega : u(x) = m\}$ und $\omega \subset\subset \Omega$ mit $K \subset \omega$. Zeige, daß für $\varepsilon > 0$ klein u_ε subharmonisch auf ω ist. Wende das elliptische Maximum Prinzip (Satz 2.3) an.

43. (Die zweite Poincaré-Ungleichung: Fortsetzung von Aufgabe 25)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Lipschitz-Gebiet. *Zeige*, daß es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle $u \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\|u - u_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{1/2}.$$

Hinweis: Nehme das Gegenteil an, konstruiere eine beschränkte Folge $(u_n)_n$ in $H^1(\Omega)$ mit $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ und benutze die kompakte Einbettung von $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$.

44. (Laplace-Operator mit inhomogenen Neumann-Randbedingungen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine beschränkte offene Menge mit C^1-Rand. Für $f \in L^2(\Omega)$, $b \in L^2(\partial\Omega)$ und $\lambda > 0$ betrachten wir das Problem

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) & \\ \lambda u - \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \partial u/\partial n = b & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

(a) *Definiere*, was eine schwache Lösung des Problems ist.

(b) *Zeige*, daß es für jedes $f \in L^2(\Omega)$ und $b \in L^2(\partial\Omega)$ genau eine schwache Lösung des Problems gibt.

(c) *Zeige*: Sind $f \in L^2(\Omega)_+$ und $b \in L^2(\partial\Omega)_+$ so ist die schwache Lösung u des obigen Problems ≥ 0.

45. (Eigenschaften des Spuroperators)
Zeige die folgenden Konsequenzen aus dem Spursatz. Dabei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine beschränkte offene Menge mit C^1-Rand, $u, v \in H^1(\Omega)$ und $T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ der Spuroperator.

1. $T(u^+) = (Tu)^+$.
2. $T(u \wedge v) = (Tu) \wedge (Tv)$.
3. Ist $u \in H_0^1(\Omega)$, so ist $Tu = 0$. (Ohne Benutzung von Satz 25.2)

46. (Laplace-Operator mit Robin-Randbedingungen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Für $f \in L^2(\Omega)$ und $b \in L^\infty(\partial\Omega)_+$ mit $\int_{\partial\Omega} b\, d\sigma > 0$ betrachten wir das Problem

$$(R_{b,f}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \partial u/\partial n + bu = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeige: Ist $f \leq 0$, so ist auch $u \leq 0$, wobei u die schwache Lösung von $(R_{b,f})$ ist.

Hinweis: Vergleiche Aufgabe (45).

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 12

47. (Eigenschaften einer Menge im $\mathbb{R}^2$)
Sei $\Omega := (-1,1)^2 \setminus \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. *Entscheide*, ob

(a) es einen Fortsetzungsoperator $E \in \mathscr{L}(H^1(\Omega), H^1(\mathbb{R}^N))$ gibt.

(b) die Einbettung $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p \leq \infty$ kompakt ist.

(c) $\{u|_\Omega : u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)\}$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$ ist für $1 \leq p \leq \infty$.

(d) es ein $T \in \mathscr{L}(H^1(\Omega), L^2(\partial\Omega))$ gibt, so daß $Tu = u|_{\partial\Omega}$ falls $u \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$.

(e) Ω die zweite Poincaré-Ungleichung erfüllt.

(f) $W^{1,1}(\Omega)$ stetig in $L^2(\Omega)$ eingebettet ist.

(g) Ω der äußeren Kegelbedingung genügt.

(h) Ω Dirichlet regulär ist.

48. (Hölderstetige Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine beschränkte und offene Menge und sei $\alpha \in (0,1]$. Dann definieren wir

$$C^{0,\alpha}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid [u]_\alpha < \infty\} \qquad \text{wobei} \qquad [u]_{\alpha,\Omega} := \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

(a) *Zeige*, daß für $\alpha \in (0,1]$ gilt: $C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

(b) Zeige, daß für $u, v \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ gilt: $uv \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ und

$$[uv]_\alpha \leq \|u\|_{C(\overline{\Omega})} \cdot [v]_\alpha + \|v\|_{C(\overline{\Omega})} \cdot [u]_\alpha, \qquad \|uv\|_{C^{0,\alpha}} \leq \|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \|v\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

(c) *Zeige*, daß $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} : C^{0,\alpha}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch $\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + [u]_{\alpha,\Omega}$ eine Norm ist.

(d) *Zeige*, daß $C^{0,\alpha}(\Omega)$ versehen mit $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ ein Banachraum ist.

(e) Seien $\alpha, \beta \in (0,1]$ mit $\alpha < \beta$. *Zeige*, daß $C^{0,\beta}(\Omega)$ stetig in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ eingebettet ist.

49. (Interpolationsungleichung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und sei $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$. *Zeige*, daß für $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^\alpha_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)},$$

wobei $\alpha \in [0,1]$ so gewählt sei, daß $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

Hinweis: Hölder-Ungleichung und begründen, warum $\alpha \in (0,1)$ gewählt werden kann.

50. (Sobolevscher Einbettungssatz)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene und beschränkte Menge mit Lipschitz-Rand und sei $1 \leq p < N$. Zeige, daß die Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

stetig ist für jedes $q \in [p, p^\star]$ wobei $1/p^\star = 1/p - 1/N$.

Hinweis: Fortsetzungeigenschaft für $q = p^\star$ und dann Interpolationsungleichung.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Abgabetermin: Di, 25.07.2006

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. Markus Biegert
SS 2006

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 13

51. (Anwendung von Calderon-Zygmund)
Seien gegeben:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ eine offene Menge
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := |x|^q$ mit $1 < q < 1 + 2/N$
- $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $\lambda u - \Delta u = f(u)$ schwach.

Wir zeigen nun, daß $u \in C(\Omega)$ ist. Dazu betrachten wir das Intervall $I := [2, Nq)$ und $\alpha : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\alpha(s) := Ns/(Nq - s)$.

(a) *Zeige*, daß es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $2 \in D(a^k)$ und $\alpha^k(2) \geq Nq$.

(b) *Zeige:* Ist $s \in I$ und $v \in W_{\text{loc}}^{1,s}(\Omega)$, dann ist $f(v) \in L_{\text{loc}}^{\alpha(s)}(\Omega)$.

(c) *Zeige*: Für $s \in I$ ist $W_{\text{loc}}^{1,s}(\Omega) \subset L_{\text{loc}}^{\alpha(s)}(\Omega)$.

(d) Zeige, daß $u \in C(\Omega)$ ist.

Hinweis:

- $D(\alpha^1) := I$ und $\alpha^1 : D(\alpha_1) \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $\alpha^1(s) := \alpha(s)$.
- $D(\alpha^{n+1}) := \{s \in D(\alpha^n) : \alpha^n(s) \in I\}$ und $\alpha^{n+1} : D(\alpha^{n+1}) \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $\alpha^{n+1}(s) := \alpha(\alpha^n(s))$.

52. (Anwendung des Schaefer'schen Fixpunktsatzes)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene und beschränkte Lipschitz-Menge und sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. *Zeige:* Es gibt $\lambda_0 \geq 0$ so daß für jedes $\lambda \geq \lambda_0$ das Problem

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) & \\ \lambda u - \Delta u = f(u) & \text{in } \Omega \\ \partial u / \partial n = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

eine schwache Lösung besitzt.

Hinweis: Aufgabe (26) sowie Satz 29.7 können hilfreich sein.