Übungen zu PDE
Sommersemester 2008.

Inhaltsverzeichnis

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Abgabetermin: Mo, 21.04.2008

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. Markus Biegert
SS 2008

Gesamt: 12 Punkte

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 1

1. *Beweise* folgenden Satz. [3]

Satz 1 *Seien $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (d.h. $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar). Dann ist $u(t,x) := u_0(x - tc)$ die eindeutige Lösung von*

$$\begin{cases} u_t(t,x) + \nabla u(t,x) \cdot c = 0 \\ u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

2. *Beweise* folgenden Satz. [3]

Satz 2 *Seien $c \in \mathbb{R}$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$. Dann ist*

$$u(t,x) := u_0(x - tc) + \int_0^t f(x - tc + sc)\, ds$$

die eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} u_t + u_x \cdot c = f \\ u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

3. *Löse* folgende inhomogene Transportgleichung: [3]

$$\begin{cases} u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \\ 2u_t + 3u_x = \cos(x) \\ u(0,x) = (2/3)\sin(x). \end{cases}$$

4. *Löse* folgende Wellengleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. [3]

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0,x) = \sin(x) \\ u_t(0,x) = \sin(x). \end{cases}$$

Bitte im Newsletter-System zu dieser Vorlesung anmelden. Anmeldungen erfolgen unter

`http://cantor.mathematik.uni-ulm.de/~newsletter/cgi-bin/newsletter.py`

Veranstaltungstermine:

```
Vorlesung: Montags, 12-14 Uhr in Helmholtzstr. 18, Raum 220.
           Donnerstags, 12-14 Uhr in O28, Raum H21.
Uebungen:  Montags, 14-16 Uhr in Helmholtzstr. 18, Raum 220.
```

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
www.mathematik.uni-ulm.de/m5/biegert/pde

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. Markus Biegert
SS 2008

Abgabetermin: Mo, 28.04.2008

Gesamt: 16 Punkte

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 2

Definition 3 *Für eine offene Menge* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *bezeichnen wir mit* $\mathscr{D}(\Omega)$ *den Raum der* Testfunktionen *auf* Ω *gegeben durch*

$$\mathscr{D}(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) : \exists K \subset \Omega \text{ kompakt und } u \equiv 0 \text{ auf } \Omega \setminus K\}.$$

5. (Das schwingende Quadrat) [8]

Sei Q das Quadrat $Q := (0,\pi)^2 \subset \mathbb{R}^2$ und seien $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathscr{D}((0,\pi))$. Betrachte das Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u := u_{xx} + u_{yy} & (x,y) \in Q, t \geq 0; \text{(DGL)} \\ u(t,x,y) = 0 & (x,y) \in \partial Q; \text{(RB)} \\ u(0,x,y) = f_1(x) f_2(y) & (x,y) \in Q; \text{(AO)} \\ u_t(0,x,y) = g_1(x) g_2(y) & (x,y) \in Q \text{(AG)}. \end{cases}$$

- DGL='Differentialgleichung',
- RB='Randbedingungen' (hier Dirichlet Randbedingungen),
- AO='Anfangsort',
- AG='Anfangsgeschwindigkeit'.

Bestimme mit Hilfe des Separationsansatzes

$$u(t,x,y) = a(t)b(x)c(y)$$

eine (klassische) Lösung des obigen Problems.

6. (Grundlösung der Poissongleichung) [4]

Für $N \geq 3$ betrachten wir die Funktion $E_N : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$E_N(x) := |x|^{2-N}.$$

Berechne nun (auf $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$)

$$\Delta u := \sum_{j=1}^{N} u_{x_j x_j}.$$

7. (Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten) [4]

Sei $B(0,r) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < r\}$, $v \in C^2(B(0,r))$ und $u : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u(r,\theta) := v(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Zeige: $\Delta v(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = u_{rr}(r,\theta) + u_r(r,\theta)/r + u_{\theta\theta}(r,\theta)/r^2$.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Abgabetermin: Mo, 05.05.2008

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. Markus Biegert
SS 2008

Gesamt: 16 Punkte

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 3

8. (Das Dirichlet-Problem auf dem Rechteck) [16]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ das Rechteck gegeben durch $\Omega := (0,\pi) \times (0,l) \subset \mathbb{R}^2$ und sei $g \in C_0(0,\pi)$.
Hierbei bezeichnet $C_0(a,b)$ den Banach gegeben durch

$$C_0(a,b) := \{u \in C([a,b]) : u(a) = u(b) = 0\}, \quad \|u\|_{C_0(a,b)} := \sup_{x\in[a,b]} |u(x)|.$$

Dazu betrachten wir das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \\ \Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \\ u(x,y) = 1_{\{l\}}(y) g(x) \text{ für } (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

(a) *Zeige*, daß es höchstens eine Lösung von (1) gibt.

(b) *Zeige*, daß der Unterraum $\mathscr{T} \subset C_0(0,\pi)$ gegeben durch

$$\mathscr{T} := \left\{ \sum_{k=1}^{N} b_k \sin_k : N \in \mathbb{N}, b_k \in \mathbb{R} \text{ für } k = 1,\dots,N \right\}$$

dicht in $C_0(0,\pi)$ liegt. Hierbei sind die Funktionen $\sin_k : \mathbb{R} \to [-1,1]$ gegeben durch

$$\sin_k(t) := \sin(tk).$$

(c) *Zeige*: Ist $g \in \mathscr{T}$ gegeben durch $g = \sum_{k=1}^{N} b_k \sin_k$ mit $b_k \in \mathbb{R}$ für $k = 1,\dots,N \in \mathbb{N}$, so ist

$$u(x,y) := \sum_{k=1}^{N} b_k \sin(kx) \frac{\sinh(ky)}{\sinh(kl)}$$

eine Lösung von (1).

(d) Seien $g_n \in \mathscr{T}$ mit $g_n = \sum_{k=1}^{N_n} b_k^{(n)} \sin_k$ und $g \in C_0(0,\pi)$. *Zeige*: Konvergiert $g_n \to g$ in $C_0(0,\pi)$, so konvergiert $b_k^{(n)}$ gegen b_k wobei b_k gegeben ist durch

$$b_k := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt) g(t)\, dt.$$

<u>Hinweis:</u> Zeige, daß für $j,k \in \mathbb{N}_0$, $j \neq k$ gilt: $\int_0^{\pi} \sin(kt)\sin(jt) = 0$.

(e) Seien $g_n \in \mathscr{T}$, $g \in C_0(0,\pi)$ und u_n die Lösung von

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \\ \Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \\ u(x,y) = 1_{\{l\}}(y) g_n(x) \text{ für } (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

Zeige: Konvergiert $g_n \to g$ in $C_0(0,\pi)$, so existiert $u := \lim_n u_n$ in $C([0,\pi] \times [0,l])$ und u löst das Problem (1).

9. (Zusatzaufgabe)
Wir betrachten das Rechteck $R := (a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2$ mit $a < b$, $c < d$ und reelle Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4. *Bestimme* nun eine Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit

- $\Delta u(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
- $u(a,c) = c_1$, $u(b,c) = c_2$, $u(b,d) = c_3$ und $u(a,d) = c_4$.

Benutze dies um eine Darstellung der Lösung des Problems

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \\ \Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \\ u(x,y) = h(x,y) \text{ für } (x,y) \in \partial R, \end{cases} \tag{2}$$

für beliebiges $h \in C(\partial R)$ anzugeben.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. Markus Biegert
SS 2008

Abgabetermin: Mo, 19.05.2008

Gesamt: 16 Punkte

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 4

10. (Subharmonische Funktionen) [2]
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge. *Zeige:* Ist $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ subharmonisch in Ω und $h \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ harmonisch in Ω und gilt $u \leq h$ auf $\partial\Omega$, so ist $u \leq h$ auf $\overline{\Omega}$.

11. (Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet Randbedingungen) [4]
Wir betrachten für $u_0 \in C_0([0,\pi])$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & t > 0,\ x \in (0,\pi), & \text{Differentialgleichung (DGL)} \\ u(t,x) = 0 & x \in \{0,\pi\},\ t > 0, & \text{Randbedingungen (RB)} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in [0,\pi], & \text{Anfangswert (AW).} \end{cases}$$

Sei $u \in C([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^\infty((0,\infty),[0,\pi])$ die nach Theorem 9.4 eindeutige Lösung der obigen WLG. *Zeige:* Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(t,\cdot) \to 0 \text{ in } C([0,\pi]) \text{ für } t \to \infty.$$

12. (Wärmeleitungsgleichung mit Neumann Randbedingungen)
Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & t > 0,\ x \in (0,\pi), & \text{Differentialgleichung (DGL)} \\ u_x(t,x) = 0 & x \in \{0,\pi\},\ t > 0, & \text{Randbedingungen (RB)} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in [0,\pi], & \text{Anfangswert (AW).} \end{cases}$$

(a) *Zeige*, daß U_n für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben durch [1]

$$U_n(x,t) := e^{-n^2 t}\cos(nx)$$

die Eigenschaften (DGL) und (RB) erfüllen.

(b) Sei $u_0 \in C^2[0,\pi]$ mit $u_0'(0) = u_0'(\pi) = 0$. *Bestimme* geeignete Konstanten a_n, $(n \in \mathbb{N}_0)$, so daß die Funktion u gegeben durch [5]

$$u(t,x) := \frac{a_0}{2}U_0(t,x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(t,x)$$

in $C([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^\infty((0,\infty) \times [0,\pi])$ liegt und eine Lösung des obigen Problems ist.

(c) Sei $u \in C([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^1((0,\infty) \times [0,\pi])$ eine Lösung der obigen WLG. Die Gesamtwärme $\mathscr{W}(t)$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ sei gegeben durch $\mathscr{W}(t) := \int_0^\pi u(t,x)\,dx$. *Zeige*, daß $\mathscr{W}(\cdot) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ konstant ist. Hinweis: Berechne $d\mathscr{W}/dt$. [2]

(d) *Zeige*, daß es für jedes $u_0 \in C([0,\pi])$ höchstens eine Lösung [2]

$$u \in C([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^1((0,\infty) \times [0,\pi])$$

gibt. Hinweis: Betrachte die Energie $\mathscr{E}(t) := \frac{1}{2}\int_0^\pi u(t,x)^2\,dx$.

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 5

13. (Laplace-Operator für radiale Funktionen)
Seien $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$, $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N : r_1 < |x| < r_2\} \subset \mathbb{R}^N$, $v \in C^2(r_1, r_2)$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u(x) := v(|x|)$. *Zeige*, daß für alle $x \in \Omega$ gilt:

$$\Delta u(x) = v''(|x|) + \frac{N-1}{|x|} v'(|x|).$$

14. (Partielle Integration/Hauptsatz für spezielle C^1-Mengen)
Sei $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > \gamma(x_1, \ldots, x_{N-1})\}$.

(a) *Zeige:* Für $z \in \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N = \gamma(x_1, \ldots, x_{N-1})\}$ ist die äußere Normale von Ω im Punkte z gegeben durch

$$\nu(z) = \frac{(\nabla\gamma(z'), -1)}{\sqrt{|\nabla\gamma(z')|^2 + 1}}.$$

(b) Sei $U := \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty)$ und sei $v \in C_c^1(\mathbb{R}^N) = \{w \in C^1(\mathbb{R}^N) : \mathrm{supp}(w) \text{ ist kompakt}\}$. *Zeige*:

$$\int_U D_j v = 0 \qquad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, N-1\}.$$

Hinweis: Benutze Fubini geeignet.

(c) Sei $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. *Zeige*, daß für $j \in \{1, \ldots, N\}$ gilt:

$$\int_\Omega D_j u \, dx = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(z', \gamma(z')) \nu_j(z', \gamma(z')) \sqrt{|\nabla\gamma(z')|^2 + 1} \, dz'.$$

Hinweis: Betrachte die Fälle $j \in \{1, \ldots, N-1\}$ und $j = N$ getrennt.

(d) *Definiere* ein Borel-Maß σ auf $\partial\Omega$ geeignet, so daß für alle $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\int_\Omega D_j u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \nu_j \, d\sigma.$$

Bemerkung: Dies liefert für $\Omega \in C^1$ die Existenz des Maßes σ im Hauptsatz (10.5) der Vorlesung.

15. (Fortsetzung klassisch differenzierbarer Funktionen)

(a) Sei $u \in C^1([0,1])$ mit $u'(0) = 0$. *Zeige*, daß $\tilde{u}$ definiert durch

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{falls } x \in [0,1] \\ u(-x) & \text{falls } x \in [-1,0] \end{cases}$$

eine Funktion in $C^1[-1,1]$ ist und daß $\tilde{u}'$ eine ungerade Funktion ist.

(b) Sei $u \in C^1([0,1])$ mit $u(0) = 0$. *Zeige*, daß $\hat{u}$ definiert durch

$$\hat{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{falls } x \in [0,1] \\ -u(-x) & \text{falls } x \in [-1,0] \end{cases}$$

eine Funktion in $C^1([-1,1])$ ist und daß $\hat{u}'$ eine gerade Funktion ist.

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 6

16. (Eigenschaften des Newton-Potentials) Sei E_N das Newtonsche Potential im $\mathbb{R}^N$, also

$$E_N(x) = \begin{cases} C_N|x| & \text{falls } N = 1; \\ C_N \log(|x|) & \text{falls } N = 2; \\ C_N|x|^{2-N} & \text{falls } N \geq 3, \end{cases}$$

wobei $C_1 := 2^{-1}$, $C_2 := (2\pi)^{-1}$ und $C_N := [(2-N)w_N]^{-1}$ für $N \geq 3$ mit $w_N := \sigma(\partial B(0,1))$ die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^N$ - Vergleiche Aufgabe 6.

(a) *Zeige*, daß $D_iD_jE_N \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ für $N \geq 2$ und $i, j \in \{1, \dots, N\}$.

(b) *Zeige*, daß für $N \geq 2$ gilt: $|\nabla E_N| \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ genau dann wenn $q < N/(N-1)$.

17. (Eigenschaften der Faltung)

(a) *Zeige*, daß für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ gilt:

$$f \star g \in L^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{und} \quad \|f \star g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

<u>Hinweis:</u> Benutze den Satz von Tonelli/Fubini.

(b) *Zeige*, daß für $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ mit $p \in (1,\infty]$ gilt:

$$f \star g \in L^p(\mathbb{R}^N) \quad \text{und} \quad \|f \star g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

<u>Hinweis:</u> Für $p \in (1,\infty)$ wende die Hölder'sche Ungleichung auf $f(x-y)g(y) = [f(x-y)^{1/p}g(y)]f(x-y)^{1/q}$ mit $1/p + 1/q = 1$ an und benutze Aufgabe (17a).

(c) *Zeige*, daß für $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ mit $p, q \in (1,\infty)$ und $1/p + 1/q = 1$ gilt:

$$f \star g \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \text{und} \quad \|f \star g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.$$

<u>Hinweis:</u> Benutze die Hölder'sche Ungleichung. <u>Bemerkung:</u> In diesem Fall ist $f \star g$ stetig auf $\mathbb{R}^N$.

(d) Seien $k \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^k_c(\mathbb{R}^N)$ und $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. *Zeige*, daß $f \star g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ und

$$D^\alpha(f \star g) = (D^\alpha f) \star g \qquad \text{für jeden Multiindex } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq k.$$

<u>Hinweis:</u> Betrachte zuerst den Fall $k = 1$. Der Fall $k = 0$ wurde in der Vorlesung gezeigt.

18. (Mittelwerteigenschaften von Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $u \in C(\Omega)$. *Zeige*, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

1. $u(z) = \frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} u(x)\, dx$ für alle Kugeln $B(z,r) \subset \overline{B}(z,r) \subset \Omega$.
2. $u(z) = \frac{1}{\sigma(\partial B(z,r))} \int_{\partial B(z,r)} u(x)\, d\sigma(x)$ für alle Kugeln $B(z,r) \subset \overline{B}(z,r) \subset \Omega$.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Abgabetermin: Mo, 09.06.2008

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. Markus Biegert
SS 2008

Gesamt: 16 Punkte

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 7

19. (Hebbarkeit von Singularitäten)
Sei $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $x_0 \in (a,b)$. *Zeige:* Ist $u \in H^1(\Omega \setminus \{x_0\}) \cap C(\Omega)$, dann ist $u \in H^1(\Omega)$.

20. (Die erste Poincaré-Ungleichung)
Sei $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Zeige,* daß es eine Konstante $C > 0$ gibt so daß

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\|u'\right\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{für alle } u \in H^1(\Omega) \text{ mit } u(a) = 0.$$

21. (Sobolev-Funktionen mit höherer Ableitung Null)
Sei $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei $k \in \mathbb{N}$. *Zeige:* Ist $u \in H^k(\Omega)$ mit $u^{(k)} = 0$ so gibt es ein Polynom p vom Grade $\operatorname{grad}(p) \leq k-1$ so daß $u(x) = p(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

22. (Poisson-Problem mit Robin-Randbedingungen auf einem Intervall)
Sei $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und seien $\beta_0, \beta_1 \in [0,\infty)$ mit $\beta_0 + \beta_1 > 0$. Für $\lambda \geq 0$ betrachten wir das Poisson-Problem mit Robin-Randbedingungen

$$\begin{cases} \lambda u - u'' = f \text{ in } \Omega \\ u'(a) = \beta_0 u(a) \text{ und } u'(b) = -\beta_1 u(b). \end{cases} \tag{3}$$

(a) Sei $V := H^1(\Omega)$ und $\mathfrak{a} : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathfrak{a}(u,v) := \left(\lambda \int_\Omega uv + \int_\Omega u'v'\right) + \beta_1 u(b)v(b) + \beta_0 u(a)v(a).$$

Zeige, daß $\mathfrak{a} : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige und koerzive Bilinearform ist.

(b) Für $f \in L^2(\Omega)$ definiere $F : V \to \mathbb{R}$ durch $F(v) := \int_\Omega fv$. *Zeige:* $F \in V'$.

(c) *Zeige:* Für jedes $f \in L^2(\Omega)$ gibt es genau ein $u \in H^2(\Omega)$ welches (3) löst.

(d) *Zeige:* Ist $f \in C(\overline{\Omega})$ so ist die Lösung $u \in C^2(\Omega)$.

23. (Poisson-Problem mit gemischten Randbedingungen auf einem Intervall)
Sei $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und seinen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Für $\lambda \geq 0$ betrachten wir das Poisson-Problem

$$\begin{cases} \lambda u - u'' = f \text{ in } \Omega \\ u(a) = \alpha \text{ und } u'(b) = \beta. \end{cases} \tag{4}$$

Zeige, daß es für jedes $f \in L^2(\Omega)$ genau eine Lösung $u \in H^2(\Omega)$ gibt.

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 8

24. Seien $a < b$ reelle Zahlen und $\Omega := (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir machen folgende Annahmen:

- $\alpha > \beta > 0$ und $\delta > 0$ reelle Konstanten;
- $p \in L^\infty(\Omega)$, $p \geq \alpha$ in Ω und $1/p \in H^1(\Omega)$;
- $q \in L^\infty(\Omega)$;
- $r \in L^2(\Omega)$ mit $r - q^2/(4\beta) \geq \delta$ in Ω.

Zeige, daß es für jedes $f \in L^2(\Omega)$ genau eine Lösung des folgenden Problems gibt:

$$\begin{cases} u \in H^2(\Omega); \\ -(pu')' + qu' + ru = f \text{ in } \Omega; \\ u'(a) = u'(b) = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Vergleiche Satz 15.5 der Vorlesung, d.h. benutze den Satz von Lax-Milgram.

25. Seien $a < b$ reelle Zahlen und $\Omega := (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir machen folgende Annahmen:

- $\alpha > \beta > 0$ und $\delta > 0$ reelle Konstanten;
- $p \in L^\infty(\Omega)$, $p \geq \alpha$ in Ω und $1/p \in H^1(\Omega)$;
- $q \in H_0^1(\Omega)$;
- $r \in L^2(\Omega)$ mit $r - q'/2 \geq \delta$ oder $r - (q')^2/(16\beta) - \beta \geq \delta$ in Ω.

Zeige, daß es für jedes $f \in L^2(\Omega)$ genau eine Lösung des folgenden Problems gibt:

$$\begin{cases} u \in H^2(\Omega); \\ -(pu')' + qu' + ru = f \text{ in } \Omega; \\ u'(a) = u'(b) = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Vergleiche Satz 15.5 der Vorlesung, d.h. benutze den Satz von Lax-Milgram.

26. Seien $a < b$ reelle Zahlen und $\Omega := (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann definieren wir

$$H^1_{\text{per}}(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega) : u(a) = u(b) \right\}, \quad \|u\|_{H^1_{\text{per}}(\Omega)} := \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

und $\mathfrak{a} : H^1_{\text{per}}(\Omega) \times H^1_{\text{per}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$\mathfrak{a}(u,v) := \int_\Omega uv + \int_\Omega u'v'.$$

Zeige, daß es zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ genau eine Lösung des folgenden Problems gibt:

$$\begin{cases} u \in H^2(\Omega); \\ u - u'' = f \text{ in } \Omega; \\ u(a) = u(b) \text{ und } u'(a) = u'(b). \end{cases}$$

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 9

27. (Lokalität der schwachen Ableitung)
Seien $U \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$ offene Mengen und seien $u, v \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$. *Zeige:* Ist $u = v$ auf U, so ist für $j = 1, \ldots, N$

$$D_j u = D_j v \quad \text{auf } U.$$

Hinweis: Vergleiche Definition 16.5 der Vorlesung.

28. (Charakterisierung von $W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ durch Approximation)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge. *Zeige*, daß folgende Aussagen äquivalent sind.

1. $u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$;
2. Für $j = 1, \ldots, N$ gibt es $u_j \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $\varphi_n \in \mathscr{D}(\Omega) = C^\infty_c(\Omega)$ mit
   - $\sup_n \|\varphi_n\|_{C(K)} < \infty$ für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$;
   - $\lim_n \varphi_n = u$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$;
   - $\lim_n D_j \varphi_n = u_j$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Zeige weiterhin, daß in diesem Fall gilt: $D_j u = u_j$ für $j = 1, \ldots, N$.

Hinweis: Vergleiche Satz 16.9 der Vorlesung.

29. (Produktregel)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und seien $u, v \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$. *Zeige*, daß $uv \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ und daß für $j = 1, \ldots, N$ gilt:

$$D_j(uv) = v D_j u + u D_j v.$$

Hinweis: Vergleiche Satz 16.10 der Vorlesung.

30. (Verbandeigenschaften)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und seien $u, v \in H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. Zeige, daß

- $u \wedge v = \min(u, v) \in H^1(\Omega)$;
- $u \vee v = \max(u, v) \in H^1(\Omega)$;

Hinweis: Benutze Satz 16.12 der Vorlesung und eine geeignete Darstellung von max und min.

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 10

31. (Charakterisierung von $C_0(\Omega)$ mit Ω beschränkt)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene und beschränkte Menge. *Zeige* folgende Identität:

$$C_0(\Omega) = \left\{ u|_\Omega : u \in C(\overline{\Omega}),\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \right\}.$$

32. (Funktionen in $H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ müssen nicht Null am Rand sein)

(a) Sei $B := B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$ die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^N$ mit $N \geq 2$. Dann setzen wir für $r \in (0,1)$:

$$v_r(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| \leq r; \\ \ln(|x|)/\ln(r) & \text{falls } |x| \in (r,1). \end{cases}$$

Zeige: $v_r \in C_0(B) \cap H^1(B)$ und $v_r \to 0$ in $H^1(B)$ für $r \to 0+$.

(b) Für ein fest gewähltes $\varphi \in \mathscr{D}(B)$ setzen wir $\psi_r := \varphi - \varphi(0)v_r$. Die punktierte Einheitskugel $\dot{B}$ ist gegeben durch $\dot{B} := B \setminus \{0\} = B(0,1) \setminus \{0\}$. *Zeige:* $\psi_r \to \varphi$ in $H^1(\dot{B})$ und $\psi_r \in C_0(\dot{B}) \cap H^1(\dot{B})$.

(c) *Zeige*: Für $N \geq 2$ gibt es eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ und $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $\varphi \not\equiv 0$ auf $\partial\Omega$.

33. (Erste Poincaré-Ungleichung für offene Mengen in einem beliebigen Streifen)
Sei B eine orthogonale $N \times N$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^N$ und $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ gegeben durch

$$Tx := Bx + b.$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen so daß $T\Omega$ in einem Streifen $S_{j_0,\delta}$ liegt (vgl. Vorlesung). *Zeige:*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\delta \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}$$

für alle $u \in H_0^1(\Omega)$.

34. (Die erste Poincaré-Ungleichung gilt nicht im $\mathbb{R}^N$)
Zeige daß die erste Poincaré-Ungleichung im $\mathbb{R}^N$ nicht gilt, d.h. *zeige* daß es keine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C \, \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)^N}.$$

Hinweis: Betrachte eine Funktion $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ und dazu Funktionen $\varphi_n(x) := \varphi(x/n)$.

UNIVERSITÄT ULM
Institut Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. Markus Biegert
SS 2008

Abgabetermin: Mo, 07.07.2008
14:00 c.t. im Raum 202/203 in HeHo 22

Gesamt: 16 Punkte

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt : 11

35. *Finde* eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ so daß die Einbettung von $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ nicht kompakt ist.

36. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet. *Zeige:* Ist $u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ und $\nabla u = 0$, dann ist u konstant.
Hinweis: Was ist $(D_j u)_\varepsilon$?

37. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und $u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$. *Zeige:* Ist $D_i D_j u \in C(\Omega)$ für $i, j = 1, \ldots, N$, so ist $u \in C^2(\Omega)$. Hinweis: Wir sagen $D_i D_j u \in C(\Omega)$ falls es ein $g \in C(\Omega)$ gibt so daß

$$\int_\Omega u D_j D_i \varphi = \int g \varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

38. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und sei $u \in H^2(\Omega)$. *Zeige,* daß $D_i(D_j u) = D_j(D_i u)$ für $i, j = 1, \ldots, N$.
Hinweis: Benutze die Definition der Ableitung.

39. Wähle zwei verschiedene Sätze der Vorlesung aus und bereite diese Sätze so vor, daß Du sie in den Übungen vorstellen kannst.