Prof. Dr. R. Zacher
Dr. Dominik Dier
Sommersemester 16
Punktzahl: 20

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 1

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$. u heißt *subharmonisch* (*superharmonisch*), falls

$$-\Delta u \underset{(\geq)}{\leq} 0 \text{ in } \Omega.$$

Zeige:

(a) $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x) = |x|^\alpha$ mit $\alpha \geq 2$ ist subharmonisch.

(b) Ist $f \in C^2(\mathbb{R})$ konvex und $v \in C^2(\Omega)$ harmonisch, dann ist $f \circ v$ subharmonisch.

(c) Ist $u \in C^3(\Omega)$ harmonisch, dann ist $v := |\nabla u|^2$ subharmonisch.

2. Definiere $\eta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\eta(x) := \begin{cases} c\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & : |x| < 1 \\ 0 & : |x| \geq 1, \end{cases} \qquad (\textit{Standard-Mollifier})$$

wobei die Konstante $c > 0$ so gewählt wird, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \,\mathrm{d}x = 1$ gilt.

(a) Zeige, dass $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt.

(b) Für $\varepsilon > 0$ sei $\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\eta(\frac{x}{\epsilon})$, $x \in \mathbb{R}^n$. Für $u \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ setzen wir

$$u_\varepsilon(x) := (\eta_\epsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x-y)u(y)\ \mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v \in L_{1,loc}(\Omega)$. v werde durch 0 auf Ω^c fortgesetzt.
Zeige: Hat v kompakten Träger in Ω (d.h. $v(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, wobei $K \subset \Omega$ kompakt ist), dann gilt $v_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$.

(c) Sei $v \in C(\Omega)$, $K \subset \Omega$ kompakt und $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge.
Zeige, dass $v_{\varepsilon_k} \to v$ gleichmäßig in K für $k \to \infty$.

(d) Zeige: Ist $v \in L_p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$, dann ist $v_\varepsilon \in L_p(\Omega)$ für alle $\varepsilon > 0$ und

$$\|v_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \leq \|v\|_{L_p(\Omega)}.$$

Weiter gilt für jede positive Nullfolge $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$: $v_{\varepsilon_k} \to v$ in $L_p(\Omega)$ für $k \to \infty$.
[Hinweis: Hier kann verwendet werden, dass jede Funktion $v \in L_p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$ durch stetige Funktionen $w : \Omega \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger in Ω beliebig genau in $L_p(\Omega)$ approximiert werden kann, d.h. $C_0^0(\Omega)$ ist dicht in $L_p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.]

(e) Zeige, dass $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L_p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.