Prof. Dr. R. Zacher
Dr. Dominik Dier
Sommersemester 16
Punktzahl: 10

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 10

1. Sei $T > 0$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Sei $u \in C^2([0,T] \times \overline{G})$ mit

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } (0,T] \times G \\ u = 0 & \text{auf } [0,T] \times \partial G, \end{cases}$$

sowie $u(T,x) = 0$, $x \in \overline{G}$.

Zeige, dass $u \equiv 0$ in $(0,T] \times G$.

Anleitung:

(a) Betrachte $\varphi(t) := \int_G u^2(t,x)\,\mathrm{d}x$, $0 \le t \le T$. Zeige:

$$\varphi'(t) = -2 \int_G |\nabla u(t,x)|^2\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \varphi''(t) = 4 \int_G ((\Delta u)(t,x))^2\,\mathrm{d}x, \quad 0 \le t \le T.$$

(b) Zeige dann $\varphi''(t)\varphi(t) \ge (\varphi'(t))^2$, $0 \le t \le T$.

(c) Man nehme an, dass ein Intervall $[t_1, t_2] \subset [0,T]$ gibt mit $\varphi(t) > 0$ für $t_1 \le t < t_2$ und $\varphi(t_2) = 0$. Leite einen Widerspruch her. Verwende dazu die Konvexität der Funktion $f(t) := \log(\varphi(t))$, $t_1 \le t < t_2$.

2. (a) Zeige, dass die Aussage von Satz 3.13 aus der Vorlesung (parabolische Harnack-Ungleichung) im Allgemeinen falsch ist für $t_1 = t_2$.

[Tipp: Betrachte die Funktionen $u(t,x) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x+a)^2}{4t}}$ mit Parameter $a \in \mathbb{R}$ (n=1).]

(b) Gilt die Aussage von Satz 3.13 auch im Fall $t_1 = 0$, wenn zusätzlich $u \in C(\overline{G_T})$ angenommen wird?

3. Sei $T > 0$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $m\colon G_T \to \mathbb{R}$ stetig und nichtnegativ und $u \in C^{1,2}(G_T) \cap C(\overline{G_T})$ mit

$$\partial_t u - \Delta u + mu \le 0 \quad \text{in } G_T.$$

Zeige, dass $\max_{\overline{G_T}} u \le \max_{\partial_p(G_T)} u_+$ gilt. ($u_+ = \max\{u, 0\}$)

4. Zeige mit Hilfe der parabolischen Harnack-Ungleichung, dass die Aussage von Satz 3.12 aus der Vorlesung (starkes Maximumprinzip) für *Lösungen* der Diffusionsgleichung in G_T gilt.

[Für Unterlösungen erhält man die Aussage auch, wenn man zusätzlich noch eine gewisses Existenzresultat zur Verfügung hat.]