Prof. Dr. R. Zacher
Dr. Dominik Dier
Sommersemester 16
Punktzahl: 10

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 11

1. Zeige, dass die Einbettung $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ nicht kompakt ist.

2. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften aus Bemerkung 3.34 gelten:

(a) $\|u(t,\cdot)\|_{L_2(G)} \le e^{-\lambda_1^D t}\|u_0\|_{L_2(G)}$, $t > 0$

(b) $E(t) := \|\nabla u(t,\cdot)\|^2_{L_2(G)}$ ist monoton fallend in $t > 0$ und $E(t)$ ist beschränkt genau dann wenn $u_0 \in \mathring{H}^1(G)$.

3. Zeige, dass unter den Vorraussetzungen von Satz 3.24 gilt:

Ist $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, so ist $A - \lambda I$ invertierbar. Ferner ist für $f \in H$ die Lösung u von $Au - \lambda u = f$ gegeben durch

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda)^{-1} (f, e_n)_H e_n \quad \text{(Konvergenz in } H\text{)}.$$

4. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass dann die Einbettung $H^1(G) \hookrightarrow L_2(G)$ kompakt ist. Untersuche die Wärmeleitungsgleichung mit Neumann Randbedingungen

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \\ \partial_\nu u = 0 \\ u(0,\cdot) = u_0. \end{cases}$$

Wie ist das asymptotische Verhalten? Wie verhält sich $E(t) := \|\nabla u(t,\cdot)\|^2_{L_2(G)}$?