Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 15.7.2016

Prof. Dr. R. Zacher
Dr. Dominik Dier
Sommersemester 16
Punktzahl: 10

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 12

1. Sei $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$ Lösung des AWP

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x),\, \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Es wird angenommen, dass u_0 und u_1 kompakten Träger haben. Sei $k(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \partial_t^2(t,x)\,\mathrm{d}x$ (kinetische Energie) und $p(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2(t,x)\,\mathrm{d}x$ (potentielle Energie).

Zeige:

(a) $k(t) + p(t)$ ist konstant in t.

(b) $k(t) = p(t)$ für alle hinreichend große t.

2. Sei $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^3)$ Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \\ u(0,x) = u_0(x),\, \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

wobei u_0, u_1 glatt sind und kompakten Träger haben.

Zeige: Es gibt eine Konstante C, sodass

$$|u(t,x)| \leq \frac{C}{t} \quad \forall t > 0,\, x \in \mathbb{R}^3.$$

3. Sei $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ $(n \in \mathbb{N})$, Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x),\, \partial_t u(0,x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

wobei u_0 glatt ist und kompakten Träger besitzt. Zeige:

$$v(t,x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} u(s,x)\,\mathrm{d}s, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^n,$$

löst die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t v - \Delta v = 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$$

mit Anfangsbedingung $v(0,x) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (interpretiert in geeignetem Sinne).