Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 29.4.2016

Prof. Dr. R. Zacher
Dr. Dominik Dier
Sommersemester 16
Punktzahl: 10

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 2

1. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\psi \in C^\infty(G)$ und $l \in \mathcal{D}'(G)$. Zeige:

(a) $\partial_i(\psi l) = (\partial_i \psi)l + \psi \partial_i l$ für $i = 1, \ldots, n$ (siehe Bem. 2.12 (ii) der Vorlesung).

(b) Für alle $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ gilt $\psi\delta_0 = \psi(0)\delta_0$ und für $\psi(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, gilt $\delta_0 + \psi\delta_0' = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sie $l(\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}x$. Zeige, dass $l \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Gegeben ist die lokal integrierbare Funktion $f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha & , x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$, wobei $\alpha > -1$ ist. Berechne die distributionelle Ableitung f'. Für welche α ist $f' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ eine reguläre Distribution?

4. Zeige, dass für $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$, gilt: $\mathcal{F}f(\xi) = f(\xi)$.

[Hinweis: Man kann verwenden, dass $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.]

5. Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Zeige:

(a) $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$,

(b) $\int_{\mathbb{R}^n} f\overline{g} \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\overline{\hat{g}} \,\mathrm{d}\xi$.

6. Zeige: Jede Distribution $l \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger ist temperiert.

7. Für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiere $\tilde{f}(x) := f(-x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (Spieglung von f).

(a) Seien $l \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Zeige:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * l)(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} l(x)(\tilde{f} * \varphi)(x) \,\mathrm{d}x$$

(b) Seien $l \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Definiere $f * l$ durch

$$\langle f * l, \varphi\rangle := \langle l, \tilde{f} * \varphi\rangle \quad , \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Zeige: $f * l \in S'(\mathbb{R}^n)$ und $f * \delta_0 = f$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.