Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 6.5.2016

Prof. Dr. R. Zacher
Dr. Dominik Dier
Sommersemester 16
Punktzahl: 10

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 3

1. Sei $n \geq 2$, $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch in $\mathbb{R}^n$ und $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Zeige: $u = 0$.

2. Sei $n \geq 2$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u \in C^2(G)$ harmonisch.

(a) Zeige, dass u keine isolierten Nullstellen besitzt, d.h. für $x_0 \in G$ mit $u(x_0) = 0$ gilt, für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ sodass $u(x) = 0$.

(b) Zeige, dass die Aussage (a) im Fall $n = 1$ im Allgemeinen falsch ist.

3. Beweise den folgenden Satz:

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in L_{1,loc}(G)$. Es gelte

$$\int_G u(x)\Delta\varphi(x)\;\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Dann ist u harmonisch in G.

Anleitung:

(a) Es genügt den Satz für $u \in L_1(\overline{G})$ mit $\overline{G}$ kompakt zu beweisen.

Wir nehmen also im folgenden an, dass $u \in L_1(\overline{G})$ mit $\overline{G}$ kompakt.

(b) Sei $u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ die Glättung von u (vgl. Blatt 1) und $G_\varepsilon = \{x \in G : \operatorname{dist}(x, \partial G) > \varepsilon\}$. Dann gilt:

$$\int_G \Delta u_\varepsilon \varphi(x)\;\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G_\varepsilon).$$

u_ε ist also harmonisch in G_ε.

(c) Sei $\delta > 0$ und $\varepsilon \in (0, \frac{\delta}{2})$. Dann erfüllt u_ε auf allen Kugeln $B_r(x_0)$ mit $x_0 \in G_\delta$ und $r \leq \frac{\delta}{2}$ die Mittelwerteigenschaft.

(d) Es existiert ein $C_1 > 0$, sodass für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\|u_\varepsilon\|_{L_1(G)} \leq C_1$.

(e) Seien δ und ε wie in Teil (c). Dann gibt es ein $C > 0$, welches unabhängig von ε ist, sodass $\|u_\varepsilon\|_{L_\infty(G_\delta)} \leq C$, d.h. die Familie $(u_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\frac{\delta}{2}}$ ist gleichmäßig beschränkt in G_δ für festes $\delta > 0$.

(f) Die Familie $(u_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\frac{\delta}{2}}$ ist gleichgradig stetig auf G_δ für festes $\delta > 0$.

(g) u ist harmonisch in G.

4. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Die Funktionen $u_n \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ seien harmonisch in G mit $u_n = g_n$ auf ∂G, wobei $g_n \in C(\partial G)$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$\sup_{\partial G} |g_n - g_m| \to 0 \quad \text{für } n, m \to \infty.$$

Zeige, dass die Folge (u_n) gleichmäßig gegen eine Funktion $u\colon \overline{G} \to \mathbb{R}$ konvergiert, welche ebenfalls harmonisch in G und stetig in $\overline{G}$ ist.