Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 13.5.2016

Prof. Dr. R. Zacher
Dr. Dominik Dier
Sommersemester 16
Punktzahl: 10

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 4

1. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^2(G)$ eine Folge von in G harmonischen Funktionen mit $u_k \leq u_{k+1}$ in G für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gebe einen Punkt $y \in G$, sodass die Folge $(u_k(y))_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Zeige: Dann konvergiert die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf jedem beschränkten Gebiet G' mit $\overline{G'} \subset G$ gleichmäßig gegen eine Harmonische Funktion.

[Hinweis: Verwende die Harnack-Ungleichung]

2. Sei $n \geq 2$, $B = B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ und $g \in C(\partial B)$. Definiere die Funktion $u\colon \overline{B} \to \mathbb{R}$ durch

$$u(x) = \begin{cases} \frac{r^2-|x|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B} \frac{g(y)}{|x-y|^n} \,\mathrm{d}\sigma(y) & , x \in B \\ g(x) & , x \in \partial B. \end{cases} \qquad \text{(Poisson-Formel)}$$

Zeige: $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$, und es gilt $\Delta u = 0$ in B.

3. (a) Sei $n \geq 2$ und $u \in C^2(B_r(0)) \cap C(\overline{B_r(0)})$ eine nichtnegative Funktion, welche harmonisch in $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ sei.
Zeige mit Hilfe der Poisson-Formel aus Aufgabe 2. folgende Darstellung der Harnack-Ungleichung: Für jedes $x \in B_r(0)$ gilt:

$$r^{n-2}\frac{r-|x|}{(r+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq r^{n-2}\frac{r+|x|}{(r+|x|)^{n-1}}u(0)$$

(b) Beweise mit Hilfe von (a): Ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine harmonische Funktion, die nach oben oder unten beschränkt ist, dann ist u konstant.

4. (a) Sei $\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ und $u \in C^2(\mathbb{H}) \cap C(\overline{\mathbb{H}})$ beschränkt mit $-\Delta u = 0$ in $\mathbb{H}$ und $u = 0$ auf $\partial\mathbb{H}$.
Zeige: $u = 0$.

(b) Sei $G = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$. Sei $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ harmonisch in G. Weiterhin gelte $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.
Zeige: $\sup_G|u| = \sup_{\partial G}|u|$.