Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 27.5.2016

Prof. Dr. R. Zacher
Dr. Dominik Dier
Sommersemester 16
Punktzahl: 10

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 6

1. Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ und $u \in H^1(I)$. Zeige, dass für fast alle $(x, y) \in I \times I$ gilt:

$$|u(x) - u(y)| \leq \|\partial_x u\|_{L_2(I)} |x - y|^{1/2}.$$

Insbesondere kann man einen stetigen Repräsentanten für u finden.

Anleitung: Zeige die Ungleichung erst für C^1-Funktionen, verwende dann ein Dichtheitsargument.

2. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $u \colon G \to \mathbb{R}$ definieren wir den positiven Teil $u_+ = \mathbb{1}_{\{u>0\}} \cdot u$. Sei nun $u \in W_p^1(G)$ mit $1 \leq p < \infty$.

Zeige, dass $u_+ \in W_p^1(G)$ ist mit $\nabla(u_+) = \mathbb{1}_{\{u>0\}} \cdot \nabla u$ (im Sinne von schwachen Ableitungen). Zeige ferner, dass $\nabla u = 0$ ist f.ü. auf der Menge $\{x \in G : u(x) = 0\}$.

Anleitung:

(a) Eine Kettenregel: Sei $v \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Dann gilt für $u \in W_p^1(G)$: $v \circ u \in W_p^1(G)$ mit (schwacher) Ableitung $\nabla(v \circ u) = v'(u)\nabla u$.

Zeige dies zunächst für glatte u und verwende dann ein Approximationsargument.

(b) Betrachte $v \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(t) = t_+ = \max\{t, 0\}$. Approximiere v mit

$$v_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon & : t > 0 \\ 0 & : t \leq 0 \end{cases}, \quad \varepsilon > 0.$$

Wende die Kettenregel aus (a) auf v_ε und $u \in W_p^1(G)$ an und betrachte den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$.

(c) Betrachte $\nabla(u_-)$, wobei $u_- := (-u)_+$ und zerlege u als $u = u_+ - u_-$.

3. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $A \in L_\infty(G; \mathbb{R}^{n \times n})$. Es existiere ein $\nu > 0$, sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt $(A(x)\xi \,|\, \xi) \geq \nu |\xi|^2$ für fast alle $x \in G$.

Sei $u \in H^1(G)$ eine schwache Lösung von $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) = 0$ in G, d.h.

$$\int_G (A(x)\nabla u(x) \,|\, \nabla v(x)) \,\mathrm{d}x = 0$$

für alle $v \in \mathring{H}^1(G)$.

Sei $K \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $u \leq K$ auf $\partial\Omega$, falls gilt $(u - K)_+ \in \mathring{H}^1(G)$.

Zeige: Ist $u \leq K$ auf $\partial\Omega$, dann ist $u \leq K$ in G.