Universität Ulm

Prof. Dr. R. Zacher
Dr. Dominik Dier

Abgabe: Freitag, 4.6.2016

Sommersemester 16
Punktzahl: 10

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 7

1. (a) Sei $f \in S(\mathbb{R}^n)$, dann gilt nach der Vorlesung $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Nach dem Fortsetzungsprinzip (siehe Spuroperator) können wir also die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ definieren. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir den Hilbertraum

$\tilde{H}^k(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1+|\xi|^k)\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$, $\|u\|_{\tilde{H}^k(\mathbb{R}^n)} := \|(1+|\xi|^k)\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Zeige: $\tilde{H}^k(\mathbb{R}^n)$ ist isomorph zu $H^k(\mathbb{R}^n)$.

(b) Sei $b \in \mathbb{R}^n$ und $c > 0$. Zeige: Falls $|b|$ hinreichend klein ist, so existiert für all $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ genau ein $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$, sodass gilt $-\Delta u + b \cdot \nabla u + cu = f$.

2. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand, $h \in C(\partial G)$ mit $0 \le h(x) \le h_0$ für alle $x \in G$, $a \in L_\infty(G)$ mit $0 < \delta \le a(x)$ für fast alle $x \in G$ und $f \in L^2(G)$.

(a) Leite die schwache Formulierung der folgenden Gleichung her.

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f & \text{auf } G, \\ \partial_\nu u + hu = 0 & \text{auf } \partial G \end{cases}$$

(b) Zeige unter Verwendung von Lax–Milgram Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung.

3. Sei $G = (-1,1)$, $a \in L_\infty(G)$ mit $0 \le a(x)$ für fast alle $x \in G$ und $f \in L^2(G)$. Leite die schwache Formulierung der Gleichung

$$\begin{cases} u_{xxxx} + a(x)u = f & \text{auf } G, \\ u(-1) = u(1), \\ u'(-1) = u'(1) \end{cases}$$

her und zeige Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung in $\mathring{H}^2(G)$.

4. *Gegenbeispiele zur maximalen Regularität in L_∞ und C.*

(a) Sei $n = 2$ und $u(x) = \begin{cases} x_1 x_2 \log(x_1^2 + x_2^2) & : x \neq 0, \\ 0 & : x = 0, \end{cases}$ $x = (x_1, x_2) \in \overline{B_1(0)}$.

Zeige: $\Delta u \in L_\infty(B_1(0))$ (im Sobolevschen Sinne) und $u|_{\partial B_1(0)} = 0$, aber $u \notin W^2_\infty(B_1(0))$.

(b) Sei $n \ge 2$ und $P(x) = x_1 x_2$. Sei $\eta \in C_0^\infty(B_2(0))$ mit $\eta \equiv 1$ in $\overline{B_1(0)}$. Sei $c_k := \frac{1}{k}$ und $t_k := 2^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Betrachte die Funktion

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \,[\Delta(\eta P)]\,(t_k x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeige: f ist stetig in $\mathbb{R}^n$, aber die Gleichung $-\Delta u = f$ besitzt für kein $\varepsilon > 0$ eine $C^2(B_\varepsilon(0))$-Lösung in $B_\varepsilon(0)$.