



Übungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 1

1. *Wichtige Banach- und Nicht-Banachräume.* Überprüfe die folgenden normierten Vektorräume auf Vollständigkeit. In Worten der Vorlesung: Sind folgende normierte Vektorräume Banachräume?

(a) $E_1 = c_0 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0\}$ mit $\|(x_n)\|_{E_1} := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. (4)

(b) $E_2 = C[-1, 1] := \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}$ mit $\|f\|_{E_2} := \int_{-1}^1 |f(t)| dt$. (4)

2. *Berechnung von Fourierreihen.* Berechnen Sie die formalen Fourierreihen der 2π -periodischen Fortsetzungen der Funktionen $f_i : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

(a) $f_1(t) = t$. (3)

(b) $f_2(t) = |t|$. (3)

(c) $f_3(t) = \frac{m}{2} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]}(t)$ für $m \in \mathbb{N}$. Bestimme zusätzlich das Verhalten der Fourierkoeffizienten für $m \rightarrow \infty$. Wie verhält sich die Werteverteilung der Fourierkoeffizienten gegenüber der Werteverteilung der Funktion (für große m)? (3)

3. *Kriterium für gleichmäßige Konvergenz der Fourierkoeffizienten.* Es seien $f_n, f \in L^1_{2\pi}$ mit $f_n \rightarrow f$ in $L^1_{2\pi}$. Zeige, dass dann die Fourierkoeffizienten $\widehat{f}_n(k) \rightarrow \widehat{f}(k)$ ($n \rightarrow \infty$) gleichmäßig in k konvergieren. (3)