Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Lösungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 1

1. *Wichtige Banach- und Nicht-Banachräume.* Überprüfe die folgenden normierten Vektorräume auf Vollständigkeit. In Worten der Vorlesung: Sind folgende normierte Vektorräume Banachräume?

(a) $E_1 = c_0 \coloneqq \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0\}$ mit $\|(x_n)\|_{E_1} \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. (4)

Lösung: E_1 ist ein Banachraum. Wir müssen die Vollständigkeit zeigen. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in c_0. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $M > 0$ so, dass

$$\|x_k - x_l\|_{E_1} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{kn} - x_{ln}| < \epsilon \quad \text{für alle } k, l \geq M$$

gilt. Hier bezeichnet x_{kn} das n-te Folgenglied von $x_k = (x_{kn})_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Insbesondere ist $(x_{kn})_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wegen

$$|x_{kn} - x_{ln}| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{kn} - x_{kl}|$$

eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$. Somit gibt es wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{C}$ mit $x_n = \lim_{k\to\infty} x_{kn}$. Somit haben wir mit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unseren Kandidaten gefunden. Es bleibt noch zu zeigen, dass $(x_n) \in c_0$ und $x_n \to x$ in c_0 gilt. Es ist für alle $n, l \in \mathbb{N}$

$$|x_n - x_{ln}| = \lim_{k\to\infty} |x_{kn} - x_{ln}| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k - x_l\|_{E_1}.$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $M > 0$ so, dass $\|x_k - x_l\|_{E_1} < \epsilon$ für alle $k, l \geq M$. Also ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n - x_{ln}| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k - x_l\|_{E_1} \leq \epsilon \quad \text{für alle } l \geq M. \tag{1}$$

Da x_M eine Nullfolge ist, gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_{Mn}| \leq \epsilon$ für alle $n \geq N_0$. Dann ist für alle $n \geq N_0$

$$|x_n| \leq |x_n - x_{Mn}| + |x_{Mn}| \leq 2\epsilon.$$

Also ist $x \in c_0$. Da $\epsilon > 0$ in (1) beliebig ist, erhalten wir auch direkt $x_l \to x$ in c_0. Alternativ kann man auch zeigen, dass c_0 ein abgeschlossener Unterraum des Banachraums $\mathcal{F}^b(\mathbb{N})$ ist (dies wurde in der Vorlesung nur für kompakte Mengen gezeigt, geht aber hier genauso) und dann den Satz aus der Vorlesung verwenden, nach dem ein abgeschlossener Unterraum eines Banachraums wieder ein Banachraum ist.

(b) $E_2 = C[-1, 1] \coloneqq \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}$ mit $\|f\|_{E_2} \coloneqq \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt$. (4)

Lösung: E_2 ist nicht vollständig und damit kein Banachraum. Wir definieren

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-1, -1/n] \\ \frac{n}{2}\left(x + \frac{1}{n}\right) & \text{für } x \in [-1/n, 1/n] \\ 1 & \text{für } x \in [1/n, 1] \end{cases}.$$

Man sieht, dass die Funktionen f_n stetig sind. Zudem gilt für $m \geq n$

$$\|f_n - f_m\|_{E_2} \leq \frac{2}{n}.$$

Somit ist (f_n) eine Cauchyfolge. Angenommen, es gilt $f_n \to f \in C[-1,1]$. Dann muss $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1,0)$ gelten. Denn wäre dies falsch, so gäbe es wegen der Stetigkeit von f ein abgeschlossenes Intervall $I \subset [-1,0)$ der Länge 2δ um x, so dass $|f(y)| \geq |f(x)|/2$ für alle $y \in I$ gilt. Für n groß genug gilt dann $\|f_n - f\|_{E_2} \geq |f(x)|\,\delta$. Dies widerspricht aber der Konvergenz $f_n \to f$. Genauso zeigt man, dass $f(x) = 1$ für alle $x \in (0,1]$ gilt. Dies widerspricht aber der Stetigkeit von f. Also kann (f_n) nicht konvergieren.

Alternativ kann man auch mit dem Wissen aus der Maßtheorie folgendermaßen argumentieren. Wäre E_2 vollständig, so wäre insbesondere E_2 abgeschlossen in $L^1[-1,1]$. Da aber $C[-1,1]$ dicht in $L^1[-1,1]$ liegt, folgt hieraus $L^1[-1,1] = C[-1,1]$, was offensichtlich falsch ist.

2. *Berechnung von Fourierreihen.* Berechnen Sie die formalen Fourierreihen der 2π-periodischen Fortsetzungen der Funktionen $f_i : [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ mit

(a) $f_1(t) = t$. (3)

Lösung: Man sieht sofort, dass für den 0-ten Fourierkoeffizient $c_0 = 0$ gilt. Der k-te Fourierkoeffizient c_k $(k \neq 0)$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\,dt = \left[-\frac{1}{2\pi ik}te^{-ikt}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi ik}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\,dt \\ &= -\frac{1}{2\pi ik}(\pi e^{-i\pi k} + \pi e^{i\pi k}) + \frac{1}{2\pi k^2}(e^{-i\pi k} - e^{i\pi k}) = \frac{i}{k}(-1)^{|k|}. \end{aligned}$$

Die formale Fourierreihe ist somit

$$\sum_{k\neq 0} \frac{i}{k}(-1)^{|k|}e^{ikt} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{k}(-1)^k(e^{ikt} - e^{-ikt}) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2\sin(kt)}{k}.$$

(b) $f_2(t) = |t|$. (3)

Lösung: Mithilfe der Substitutionsregel erhalten wir

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\,e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} te^{ikt}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} te^{-ikt}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(kt)\,dt.$$

Somit folgt $c_0 = \frac{\pi}{2}$. Für $k \neq 0$ erhalten wir durch partielle Integration

$$\begin{aligned} c_k &= \left[\frac{t\sin(kt)}{k\pi}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi k}\int_0^{\pi} \sin(kt)\,dt = \left[\frac{1}{\pi k^2}\cos(kt)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi k^2}((-1)^{|k|} - 1) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi k^2} & k \text{ ungerade} \\ 0 & k \text{ gerade} \end{cases}. \end{aligned}$$

Die formale Fourreihe ist somit

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{2}{\pi(2k+1)^2}(e^{i(2k+1)t} + e^{-i(2k+1)t}) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}.$$

(c) $f_3(t) = \frac{m}{2}\,\mathbb{1}_{[-\frac{1}{m},\frac{1}{m}]}(t)$ für $m \in \mathbb{N}$. Bestimme zusätzlich das Verhalten der Fourierkoeffizienten für $m \to \infty$. Wie verhält sich die Werteverteilung der Fourierkoeffizienten gegenüber der Werteverteilung der Funktion (für große m)? (3)

Lösung: Es ist $c_0 = \frac{1}{2\pi}$. Für $k \neq 0$ erhalten wir

$$c_k = \frac{m}{4\pi}\int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} e^{-ikt}\,dt = -\frac{m}{4\pi ik}\left[e^{-ikt}\right]_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} = \frac{m}{2\pi k}\sin\left(\frac{k}{m}\right).$$

Die formale Potenzreihe ist somit

$$\frac{1}{2\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{m}{2\pi k} \sin\left(\frac{k}{m}\right) e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{2\pi k} \sin\left(\frac{k}{m}\right) (e^{ikt} + e^{-ikt})$$
$$= \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{\pi k} \sin\left(\frac{k}{m}\right) \cos(kt).$$

Nun sieht man aus der l'Hospitalschen Regel oder der Reihenentwicklung des Sinus, dass für jedes $k \neq 0$ der Ausdruck $\frac{m}{k} \sin\left(\frac{k}{m}\right)$ für $m \to \infty$ gegen 1 konvergiert. Also konvergiert der k-te Fourierkoeffizient für $m \to \infty$ für alle k gegen $\frac{1}{2\pi}$. Man erkennt hier ein allgemeines Phänomen der Fourieranalyse: Während die Funktionen für wachsendes m ihre Masse immer stärker in der Null konzentrieren, streben die Fourierkoeffizienten gegenteilig gegen eine Gleichverteilung. Dieses Phänomen nennt man das *Unschärfeprinzip*: Die Funktion und ihr Fourierbild können nach diesem nicht beide gleichzeitig stark lokalisiert sein. Das Unschärfeprinzip ist auch der mathematische Grund für die *Heisenbergsche Unschärferelation* in der Physik.

3. *Kriterium für gleichmäßige Konvergenz der Fourierkoeffizienten.* Es seien $f_n, f \in L^1_{2\pi}$ mit $f_n \to f$ in $L^1_{2\pi}$. Zeige, dass dann die Fourierkoeffizienten $\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k)$ $(n \to \infty)$ gleichmäßig in k konvergieren. (3)

Lösung: Es gilt

$$\left|\widehat{f}(k) - \widehat{f_n}(k)\right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)e^{-ikt}\,dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_n(t)|\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \|f - f_n\|_{L^1_{2\pi}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Die rechte Seite ist unabhängig von k. Somit ist die Konvergenz gleichmäßig.