UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Mittwoch, 2.5.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

# Lösungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 2

**4.** *Verhalten der Fourierkoeffizienten unter Translation.* Sei $f \in C_{2\pi}$. Definiere $g_a(t) := f(t+a)$ für $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $\widehat{g_a}(k) = e^{ika}\hat{f}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt. (2)

**Lösung:** Mithilfe der Substitutionsregel erhalten wir

$$\begin{aligned}\widehat{g_a}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-a}^{\pi-a} f(t)e^{-ik(t-a)}\,dt \\ &= e^{ika}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt = e^{ika}\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

**5.** *Charakterisierung gerader Funktionen durch die Fourierkoeffizienten.* Sei $f \in C_{2\pi}$ und

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt))$$

die formale reelle Fourierreihe von $f$. Zeige, dass $f$ genau dann gerade ist (d.h. $f(t) = f(-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$), wenn $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. (4)

**Lösung:** Ist $f$ gerade, so ist

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt = -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-t)\sin(-kt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt = 0.\end{aligned}$$

Verschwinden umgekehrt alle $b_k$, so gilt für das $n$-te Fourierpolynom $s_n$ nach der Vorlesung

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kt).$$

Dies sind offenbar gerade Funktionen. Dann sind aber auch $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_n$ gerade Funktionen. Nach dem Satz von Féjer gilt $\sigma_n \to f$ gleichmäßig, also insbesondere punktweise. Die Behauptung folgt nun wegen

$$f(-t) = \lim_{n\to\infty}\sigma_n(-t) = \lim_{n\to\infty}\sigma_n(t) = f(t) \quad \text{für alle } t.$$

**6.** *Konvergenz im Cesàro-Sinne.* In dieser Aufgabe wollen wir uns an diesen neuen Grenzwertbegriff gewöhnen.

(a) Zeige oder widerlege: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwei Folgen komplexer Zahlen und $a_\infty, b_\infty \in \mathbb{C}$. Ist $C - \lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$ und $C - \lim_{n\to\infty} b_n = b_\infty$, so ist auch $C - \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a_\infty + b_\infty$. (2)

**Lösung:** Die Aussage ist wahr. Denn aus den Rechenregeln für Grenzwerte erhält man direkt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} b_k = a_\infty + b_\infty.$$

(b) Zeige oder widerlege: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwei Folgen komplexer Zahlen und $a_\infty, b_\infty \in \mathbb{C}$. Ist $C - \lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$ und $C - \lim_{n\to\infty} b_n = b_\infty$, so ist auch $C - \lim_{n\to\infty} a_n b_n = a_\infty b_\infty$. (2)

**Lösung:** Die Aussage ist falsch. Nach dem Argument aus der Vorlesung konvergieren die Folgen $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$ beide im Cesàro-Sinne gegen Null. Hingegen ist $a_n b_n = -1$ für $n \geq 1$ und konvergiert damit nicht gegen Null.

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen und $a_\infty \in \mathbb{C}$. Zeige: Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$, so ist auch $C - \lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$. (3)

**Lösung:** Nach Voraussetzung gibt es für $\epsilon > 0$ ein $K_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_k - a_\infty| \leq \epsilon$ für alle $k \geq K_0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k - a_\infty\right| &= \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n}(a_k - a_\infty)\right| \\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{K_0-1}(a_k - a_\infty)\right| + \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=K_0}^{n}(a_k - a_\infty)\right| \\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\frac{\epsilon(n-K_0+1)}{n+1} = \epsilon.\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Konvergenz von $(a_n)$ gegen $a_\infty$ im Cesàro-Sinne.

(d) Gebe ein Beispiel einer beschränkten Folge, die nicht im Cesàro-Sinne konvergiert. (3)

**Lösung:** Setze $a_0 = 1$. Es gibt ein $N_1 \in \mathbb{N}$ so, dass wenn man $a_n = 0$ für $0 < n \leq N_1$ setzt, $\frac{1}{N_1+1}\sum_{k=0}^{N_1} a_k \leq \frac{1}{4}$ ist. Es gibt nun ein $N_1 < N_2 \in \mathbb{N}$ so, dass wenn man $a_n = 1$ für $N_1 < n \leq N_2$ setzt, $\frac{1}{N_2+1}\sum_{k=0}^{N_2} a_k \geq \frac{3}{4}$ gilt. Nun gibt es wieder ein $N_2 < N_3 \in \mathbb{N}$ so, dass wenn man $a_n = 0$ für $N_2 < n \leq N_3$ setzt, $\frac{1}{N_3+1}\sum_{k=0}^{N_3} a_k \leq \frac{1}{4}$ gilt. Setzt man die Konstruktion auf diese Art fort, so gilt für die beschränkte Folge $(a_n)$

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \frac{1}{4} < \frac{3}{4} \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Insbesondere können dann die Cesàro-Mittel nicht konvergieren.

**7.** *Stetigkeit des Skalarprodukts.* Im folgenden sei $E$ ein komplexer Prähilbertraum.

(a) Zeige, dass das Skalarprodukt in $E$ als Abbildung $E \times E \to \mathbb{C}$ stetig ist, d.h. aus $x_n \to x$ und $y_n \to y$ in $E$ folgt $(x_n|y_n) \to (x|y)$. (2)

**Lösung:** Die Stetigkeit ist eine Konsequenz der Cauchy-Schwarz Ungleichung. Da $(x_n)$ als konvergente Folge durch ein $M \geq 0$ beschränkt ist, gilt nämlich

$$\begin{aligned}|(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x_n|y) + (x_n|y) - (x|y)| \leq |(x_n|y_n - y)| + |(x_n - x|y)| \\ &\leq \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\| \leq M\,\|y_n - y\| + \|y\|\,\|y_n - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

(b) Sei $M \subset E$ eine Teilmenge. Man nennt $M^\perp := \{x \in E : (x|y) = 0 \;\forall\, y \in M\}$ das orthogonale Komplement von $M$. Zeige, dass $M^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von $E$ ist. (2)

**Lösung:** Seien $x_1, x_2 \in M^\perp$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt für alle $y \in M$

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2|y) = \lambda_1(x_1|y) + \lambda_2(x_2|y) = 0 + 0 = 0.$$

Somit folgt $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in M^\perp$. Wir haben also gezeigt, dass $M^\perp$ ein Untervektorraum von $E$ ist. Es bleibt die Abgeschlossenheit zu zeigen. Seien $x_n \in M^\perp$ mit $x_n \to x$ in $E$. Für alle $y \in M$ gilt wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts

$$(x|y) = (\lim_{n\to\infty} x_n|y) = \lim_{n\to\infty}(x_n|y) = 0.$$

Hieraus folgt $x \in M^\perp$. Somit ist $M^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von $E$.