UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Mittwoch, 9.5.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

# Übungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 3

**8.** *Lineare Operatoren.* Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $T : E \to E$ linear.

(a) Es gebe $C \geq 0$ derart, dass $\|Tx\| \leq C\,\|x\|$ für alle $x \in E$. Zeige: $T$ ist stetig. (1)

(b) Es seien $T_n : E \to E$ $(n \in \mathbb{N})$ linear und es gebe ein $C \geq 0$ mit $\|T_n x\| \leq C\,\|x\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\|Tx\| \leq C\,\|x\|$ $(x \in E)$. Ferner gebe es eine dichte Teilmenge $D$ von $E$ derart, dass $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ für alle $x \in D$. Zeige: Es ist $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ für alle $x \in E$.
**Hinweis:** Vergleiche mit dem Beweis des Satzes 4.2 über die orthogonale Entwicklung. (3)

**9.** *Polarisationsformel.* Sei $V$ ein reeller Vektorraum und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Wir setzen $a(v) := a(v, v)$. Zeige, dass für $v, w \in V$ die Polarisationsformel (2)

$$a(v, w) = \frac{1}{4}(a(v + w) - a(v - w)) \qquad \text{gilt.}$$

**Bemerkung:** Ist $V$ ein komplexer Vektorraum und $a$ eine hermitesche Sesquilinearform auf $V$, so gilt $a(v, w) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k a(v + i^k w)$. Dies müssen Sie nicht zeigen!

**10.** *Satz von Jordan-von Neumann.* Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Vektorraum. Wir wollen in dieser Aufgabe den Satz von Jordan-von Neumann zeigen:
Die Norm auf $E$ wird genau dann von einem Skalarprodukt induziert (d.h. es gibt ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ auf $E$ mit $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ für alle $x \in E$), wenn die Norm die Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

erfüllt.

(a) Zeige: Wird die Norm vom einem Skalarprodukt induziert, so gilt die Parallelogrammgleichung. (2)

(b) Zeige: Gilt die Parallelogrammgleichung für $\|\cdot\|$, so ist für alle $x_1, x_2, y \in E$ (4)

$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2 = \|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2 - \|x_2 - y\|^2 .$$

(c) Zeige: Gilt die Parallelogrammgleichung für $\|\cdot\|$, so ist für alle $x, y \in E$ und $q \in \mathbb{Q}$ (4)

$$\|qx + y\|^2 - \|qx - y\|^2 = q(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

(d) Zeige: Gilt die Parallelogrammgleichung für $\|\cdot\|$, so wird $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt induziert. (4)