Übungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 4

Hinweise zur Notation: Seien E und F normierte Räume. Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ heißt *beschränkt*, falls es ein $C \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq C \|x\|$ für alle $x \in E$ gibt. In diesem Fall setzt man

$$\|T\| \coloneqq \min\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C \|x\| \text{ für alle } x \in E\}.$$

Mit dieser Norm ist

$$\mathcal{L}(E, F) \coloneqq \{T : E \to F \text{ linear und beschränkt}\}$$

ein normierter Vektorraum. Wir betrachten im folgenden $\mathcal{L}(E, F)$ immer mit dieser Norm. Man schreibt oft $\mathcal{L}(E)$ anstatt $\mathcal{L}(E, E)$.

11. *$\mathcal{L}(E)$ ist eine normierte Algebra.* Sei E ein normierter Vektorraum. Zeige: Sind $S, T \in \mathcal{L}(E)$, so ist auch $S \circ T \in \mathcal{L}(E)$ und es gilt (3)

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\| .$$

12. *Zusammenhang zwischen unitären und isometrischen Abbildungen.* Seien E, F reelle Prähilberträume und $U : E \to F$ linear und surjektiv. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) U ist unitär, d.h. $(Ux|Uy) = (x|y)$ für alle $x, y \in E$.

(b) U ist isometrisch, d.h. $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in E$.

Tipp: Verwende die Polarisationsgleichung. (4)

13. *Unendliche Matrizen.* Wie aus der linearen Algebra im Endlichdimensionalen bekannt, kann man linearen Abbildungen Matrizen zuordnen. Wir wollen nun das Analogon dazu im Hilbertraumfall untersuchen.

(a) Sei E ein reeller Prähilbertraum und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von E. Wir betrachten die Koordinatenabbildungen $p_k : E \to \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$), die $x \in E$ den eindeutigen k-ten Koeffizienten in der Entwicklung von x bezüglich (e_n) zuordnen. Zeige: $p_k \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. (3)

(b) Sei $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$. Zeige: Es gibt eine eindeutig bestimmte Doppelfolge $(a_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}}$ derart, dass $\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}x_m$ konvergiert für alle $x \in \ell^2$ und $(Tx)_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}x_m$ für alle $x \in \ell^2$. (5)

(c) Zeige: Ist $\sum_{n,m=1}^{\infty} |a_{nm}|^2 < \infty$, so gibt es ein $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ mit $(Tx)_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}x_m$ für alle $x \in \ell^2$. (5)

Bemerkung: Lineare Operatoren mit der Eigenschaft $\sum_{n,m=1}^{\infty} |a_{nm}|^2 < \infty$ nennt man *Hilbert-Schmidt-Operatoren.*