Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 16.5.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Lösungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 4

Hinweise zur Notation: Seien E und F normierte Räume. Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ heißt *beschränkt*, falls es ein $C \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq C \|x\|$ für alle $x \in E$ gibt. In diesem Fall setzt man

$$\|T\| := \min\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C \|x\| \text{ für alle } x \in E\}.$$

Mit dieser Norm ist

$$\mathcal{L}(E, F) := \{T : E \to F \text{ linear und beschränkt}\}$$

ein normierter Vektorraum. Wir betrachten im folgenden $\mathcal{L}(E, F)$ immer mit dieser Norm. Man schreibt oft $\mathcal{L}(E)$ anstatt $\mathcal{L}(E, E)$.

11. *$\mathcal{L}(E)$ ist eine normierte Algebra.* Sei E ein normierter Vektorraum. Zeige: Sind $S, T \in \mathcal{L}(E)$, so ist auch $S \circ T \in \mathcal{L}(E)$ und es gilt (3)

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\| .$$

Lösung: $S \circ T$ ist als Komposition linearer Abbildungen linear. Es bleibt also die Beschränktheit zu zeigen. Sei $x \in E$. Dann ist

$$\|(S \circ T)(x)\| = \|S(Tx)\| \leq \|S\| \|Tx\| \leq \|T\| \|S\| \|x\| .$$

Hieraus folgt nun $S \circ T \in \mathcal{L}(E)$ mit $\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$.

12. *Zusammenhang zwischen unitären und isometrischen Abbildungen.* Seien E, F reelle Prähilberträume und $U : E \to F$ linear und surjektiv. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) U ist unitär, d.h. $(Ux|Uy) = (x|y)$ für alle $x, y \in E$.

(b) U ist isometrisch, d.h. $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in E$.

Tipp: Verwende die Polarisationsgleichung. (4)

Lösung: Ist U unitär, so folgt direkt $\|Ux\|^2 = (Ux|Ux) = (x|x) = \|x\|^2$ und somit auch $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in H$. Ist umgekehrt U isometrisch, so folgt aus $Ux = 0$ auch $\|x\| = 0$ und damit $x = 0$. Also ist U injektiv und damit nach Voraussetzung bijektiv. Aus der Polarisationsgleichung und der Isometrie folgt nun

$$\begin{aligned}(Ux|Uy) &= \frac{1}{4}(\|Ux + Uy\|^2 - \|Ux - Uy\|^2) = \frac{1}{4}(\|U(x + y)\|^2 - \|U(x - y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = (x|y).\end{aligned}$$

Somit ist U unitär.

13. *Unendliche Matrizen.* Wie aus der linearen Algebra im Endlichdimensionalen bekannt, kann man linearen Abbildungen Matrizen zuordnen. Wir wollen nun das Analogon dazu im Hilbertraumfall untersuchen.

(a) Sei E ein reeller Prähilbertraum und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von E. Wir betrachten die Koordinatenabbildungen $p_k : E \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$, die $x \in E$ den eindeutigen k-ten Koeffizienten in der Entwicklung von x bezüglich (e_n) zuordnen. Zeige: $p_k \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. (3)

Lösung: Es ist $p_k(x) = (x|e_k)$. Denn für $x = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e_m$ gilt wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts

$$p_k(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} a_m (e_m|e_k) = a_k.$$

Die Koordinatenabbildungen sind offensichtlich linear und eine Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|p_k(x)| \leq \|x\| \, \|e_k\|$ zeigt die Beschränktheit und damit die Stetigkeit.

(b) Sei $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$. Zeige: Es gibt eine eindeutig bestimmte Doppelfolge $(a_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}}$ derart, dass $\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m$ konvergiert für alle $x \in \ell^2$ und $(Tx)_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m$ für alle $x \in \ell^2$. (5)

Lösung: Sei $e_k = (\delta_{kn})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ der k-te Einheitsvektor. Dann gilt notwendigerweise $(Te_m)_n = a_{nm}$. Also ist die Doppelfolge (a_{nm}) eindeutig durch T bestimmt. Es bleibt zu zeigen, dass die (einzige mögliche) Wahl $a_{nm} = (Te_m)_n$ die Bedingungen erfüllt. Sei $x \in \ell_2$. Dann gilt $x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m e_m$. Wegen der Stetigkeit von T und der Koordinatenabbildungen (nach Teil (a)) gilt nun

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m &= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} a_{nm} x_m = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} x_m (Te_m)_n = \lim_{N\to\infty} T\left(\sum_{m=1}^{N} x_m e_m\right)_n \\ &= \left(\lim_{N\to\infty} T\left(\sum_{m=1}^{N} x_m e_m\right)\right)_n = T\left(\sum_{m=1}^{\infty} x_m e_m\right)_n = (Tx)_n.\end{aligned}$$

Also konvergiert $\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m$ für alle $x \in \ell_2$ und stimmt mit dem Wert von $(Tx)_n$ überein.

(c) Zeige: Ist $\sum_{n,m=1}^{\infty} |a_{nm}|^2 < \infty$, so gibt es ein $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ mit $(Tx)_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m$ für alle $x \in \ell^2$. (5)

Lösung: Wir bemerken zuerst, dass die Summationsreihenfolge bei der Doppelsumme keine Rolle spielt, da alle Summanden positiv sind. Motiviert aus dem letzten Aufgabenteil (und der Aufgabenstellung) setzen wir $(Tx)_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m$ für $x \in \ell^2$. Diese Abbildung ist linear und wohldefiniert: denn aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |(Tx)_n|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}|^2\right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^2\right) \\ &= \|x\|^2 \sum_{n,m=1}^{\infty} |a_{nm}|^2 .\end{aligned}$$

Dies zeigt auch die Beschränktheit und damit die Stetigkeit von T mit $\|T\| \leq \left(\sum_{n,m=1}^{\infty} |a_{nm}|^2\right)^{1/2}$.

Bemerkung: Lineare Operatoren mit der Eigenschaft $\sum_{n,m=1}^{\infty} |a_{nm}|^2 < \infty$ nennt man *Hilbert-Schmidt-Operatoren.*