Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 23.5.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Lösungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 5

14. *Multiplikatoren.* Sei H ein Hilbertraum und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H. Für eine Folge $m = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir den Multiplikationsoperator

$$T_m : x = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)e_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} m_n(x|e_n)e_n.$$

Zeige: Es gilt $T_m \in \mathcal{L}(H)$ genau dann, wenn (m_n) beschränkt ist. Ferner ist in diesem Fall $\|T_m\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|$. (6)

Lösung: T_m ist offensichtlich linear. Wir verwenden im folgenden die Parsevalsche Gleichung. Für $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x|e_n)e_n \in H$ ist $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x|e_n)|^2$.
Ist $T_m \in \mathcal{L}(H)$, so ist $|m_n| = \|T_m e_n\| \le \|T_m\|$. Also ist (m_n) beschränkt mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n| \le \|T_m\|$. Wegen der Parsevalschen Gleichung ist nun

$$\|T_m x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |m_n(x|e_n)|^2 \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(x|e_n)|^2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|^2 \|x\|^2 .$$

Hieraus folgt $\|T_m\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|^2$ und damit $\|T_m\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|^2$.
Nehmen wir nun umgekehrt an, dass (m_n) beschränkt ist. Dann folgt aus der Parsevalschen Gleichung, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} m_n(x|e_n)e_n$ für alle $x \in H$ konvergiert, da die Folge der Partialsummen eine Cauchyfolge bildet. Die Stetigkeit von T_m folgt nun direkt aus der obigen Ungleichung.

15. *Zur Definition von beschränkten Operatoren.* Es seien E, F normierte Vektorräume und sei $T : E \to F$ ein beschränkter linearer Operator, d.h. es gibt ein $C \ge 0$ mit $\|Tx\| \le C\|x\|$ für alle x in E. Man schreibt $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

(a) Wir definieren anderst als in der Vorlesung

$$\|T\| := \inf\{C \ge 0 : \|Tx\| \le C\|x\| \text{ für alle } x \in E\}.$$

Zeige, dass das Infimum ein (wie in der Vorlesung definiert) Minimum ist. (2)

Lösung: Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge (C_n) mit $C_n \to \|T\|$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|Tx\| \le C_n \|x\| \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Für festes $x \in X$ zeigt also der Übergang zum Grenzwert $\|Tx\| \le \|T\|\|x\|$, was zu zeigen war.

(b) Sei nun ferner $S \in \mathcal{L}(E, F)$. Zeige, dass $S + T \in \mathcal{L}(E, F)$ und (2)

$$\|S + T\| \le \|S\| + \|T\| .$$

Lösung: Aus der Linearen Algebra weiß man, dass $S + T$ wieder linear ist. Ferner gilt für alle $x \in X$

$$\|(S + T)x\| = \|Sx + Tx\| \le \|Sx\| + \|Tx\| \le (\|S\| + \|T\|)\|x\| .$$

Also ist $S + T \in \mathcal{L}(E, F)$ mit $\|S + T\| \le \|S\| + \|T\|$.

(c) Zeige: $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$. (3)

Lösung: Einerseits gilt für $\|x\| \leq 1$, dass $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \leq \|T\|$. Somit ist $\|T\| \geq \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$. Andererseits ist für $x \neq 0$

$$\|Tx\| = \|x\| \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \|x\| .$$

Hieraus folgt $\|T\| \leq \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$ und damit die Behauptung.

(d) Ist das Supremum aus dem vorherigen Teil im allgemeinen ein Maximum? (4)

Lösung: Im allgemeinen ist das Supremum aus dem vorherigen Teil kein Maximum. Wir können etwa auf $H = \ell^2$ den Multiplikationsoperator $T = T_m$ mit $m_n = 1 - \frac{1}{n}$ betrachten. Dann gilt $\|T\| = 1$, aber es gibt kein $\|x\| \leq 1$ mit $\|Tx\| = 1$. Denn sei $x \neq 0$ mit $\|x\| \leq 1$ gegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $(x|e_N) \neq 0$. Dann gilt

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(1 - \frac{1}{n}\right) (x|e_n) \right|^2 < \sum_{n=1}^{\infty} |(x|e_n)|^2 = \|x\|^2 \leq 1,$$

da $(1 - \frac{1}{N}) |(x|e_N)| < |(x|e_N)|$ ist.

16. *Orthogonale Projektionen sind selbstadjungiert.* Sei H ein Hilbertraum, H_1 ein abgeschlossener Unterraum von H und P die orthogonale Projektion auf H_1. Zeige: P ist selbstadjungiert, d.h. (3)

$$(Px|y) = (x|Py) \qquad \text{für alle } x, y \in H.$$

Lösung: Wir schreiben $H = H_1 \oplus H_2$, wobei H_2 das orthogonale Komplement von H_1 in H ist. Für $x, y \in H$ seien $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$ die eindeutigen Zerlegungen. Dann ist

$$(Px|y) = (x_1|y_1 + y_2) = (x_1|y_1) = (x_1 + x_2|y_1) = (x|Py).$$