Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 30.5.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Übungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 6

17. *Isomorphismen erhalten Vollständigkeit.* Seien E, F normierte Vektorräume und $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ein Isomorphismus von E auf F. Zeige: E ist genau dann vollständig, wenn F vollständig ist. (4)

18. *Charakterisierung von Stetigkeit von Sesquilinearformen.* Sei V ein komplexer normierter Vektorraum und $a : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform auf V. Zeige: a ist genau dann stetig (in beiden Komponenten), wenn es ein $M \geq 0$ gibt mit (3)

$$|a(u, v)| \leq M \, \|u\| \, \|v\| \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

19. *Projektionen auf konvexe Mengen.* Sei H ein reeller Hilbertraum und $C \subset H$ eine abgeschlossene, konvexe Menge. Ferner sei P die Projektion auf C.

(a) Zeige, dass P im Allgemeinen nicht linear ist. (3)

(b) Zeige: Es ist $\|Px - Py\| \leq \|x - y\|$ für alle $x, y \in H$. (4)

Im folgenden sei $C \coloneqq \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel in H.

(c) Zeige: C ist konvex und abgeschlossen. (2)

(d) Gebe mit Beweis die Projektion P auf C an. (4)