Lösungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 6

17. *Isomorphismen erhalten Vollständigkeit.* Seien E, F normierte Vektorräume und $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ein Isomorphismus von E auf F. Zeige: E ist genau dann vollständig, wenn F vollständig ist. (4)

Lösung: Es reicht offensichtlich aus Symmetriegründen zu zeigen, dass die Vollständigkeit von E die Vollständigkeit von F impliziert. Sei (y_n) eine Cauchyfolge in F. Dann ist wegen

$$\left\|T^{-1}y_n - T^{-1}y_m\right\| \le \left\|T^{-1}\right\| \|y_n - y_m\|$$

$(T^{-1}y_n)$ eine Cauchyfolge in E. Wegen der Vollständigkeit von E gibt es ein $x \in E$ mit $x = \lim_{n\to\infty} T^{-1}y_n$. Aus der Stetigkeit von T folgt nun, dass $y_n \to Tx$ für $n \to \infty$. Also ist F vollständig.

18. *Charakterisierung von Stetigkeit von Sesquilinearformen.* Sei V ein komplexer normierter Vektorraum und $a : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform auf V. Zeige: a ist genau dann stetig (in beiden Komponenten), wenn es ein $M \ge 0$ gibt mit (3)

$$|a(u, v)| \le M \|u\| \|v\| \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Lösung: Nehmen wir zuerst an, dass ein solches M existiert. Ist $u_n \to u$ und $v_n \to v$ in V, so ist

$$\begin{aligned} |a(u,v) - a(u_n, v_n)| &= |a(u,v) - a(u_n,v) + a(u_n,v) - a(u_n,v_n)| \\ &\le |a(u_n - u, v)| + |a(u_n, v - v_n)| \le M\|u_n - u\|\|v\| + M\|u_n\|\|v - v_n\|. \end{aligned}$$

Die rechte Seite konvergiert gegen Null, da (u_n) als konvergente Folge beschränkt ist.

Sei nun umgekehrt a stetig. Aus der Stetigkeit in $(0, 0)$ folgt, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt so, dass für alle $(u, v) \in B(0, \epsilon) \times B(0, \epsilon)$ die Abschätzung $|a(u, v)| \le 1$ gilt. Dann ist für $u, v \in V$

$$|a(u,v)| = \epsilon^{-2}\|u\|\|v\| \left| a\left(\epsilon \frac{u}{\|u\|}, \epsilon \frac{v}{\|v\|}\right) \right| \le \epsilon^{-2}\|u\|\|v\|.$$

19. *Projektionen auf konvexe Mengen.* Sei H ein reeller Hilbertraum und $C \subset H$ eine abgeschlossene, konvexe Menge. Ferner sei P die Projektion auf C.

(a) Zeige, dass P im Allgemeinen nicht linear ist. (3)

Lösung: Wir wählen $H = \mathbb{R}$ und $C = [-1, 1]$. Dann ist $C \subset H$ abgeschlossen und konvex. Sei P die Projektion auf C. Dann ist $P(2) = 1$ und $P(-1) = -1$, aber $1 = P(1) = P(2 - 1) \ne P(2) + P(-1) = 1 - 1 = 0$.

(b) Zeige: Es ist $\|Px - Py\| \le \|x - y\|$ für alle $x, y \in H$. (4)

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} \|Px - Py\|^2 &= (Px - Py|Px - Py) = (Px - x + x - Py|Px - Py) \\ &= (Px - x|Px - Py) + (x - Py|Px - Py) \le (x - Py|Px - Py) \\ &= (y - Py - y + x|Px - Py) = (y - Py|Px - Py) + (x - y|Px - Py) \\ &\le (x - y|Px - Py) \le \|x - y\|\|Px - Py\|. \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung folgt mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung. Teilen wir die Ungleichung durch $\|Px - Py\|$ (für $Px = Py$ ist die Ungleichung trivial), so folgt die Behauptung.

Im folgenden sei $C \coloneqq \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel in H.

(c) Zeige: C ist konvex und abgeschlossen. (2)

Lösung: Die Abgeschlossenheit von C folgt aus der Stetigkeit der Norm. Denn sei (x_n) eine Folge in C mit $x_n \to x$. Dann ist $\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \leq 1$. Seien $x_1, x_2 \in C$ und $\lambda \in (0,1)$. Dann ist

$$\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\| \leq \lambda \|x_1\| + (1-\lambda)\|x_2\| \leq \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

Also ist $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$. Somit ist C konvex.

(d) Gebe mit Beweis die Projektion P auf C an. (4)

Lösung: Es ist $Px = x$, falls $x \in C$ und $Px = \frac{x}{\|x\|}$ sonst. Für $x \in C$ hat P offensichtlich diese Form. Für $x \notin C$ ist $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\| \geq \|x\| - 1$ für alle $y \in C$. Andererseits ist für $y = \frac{x}{\|x\|} \in C$

$$\left\| x - \frac{x}{\|x\|} \right\| = \|x\| \left(1 - \frac{1}{\|x\|}\right) = \|x\| - 1.$$

Hieraus folgt $Px = \frac{x}{\|x\|}$ für $x \notin C$.