Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Lösungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 7

20. *Projektion auf konvexe Menge.* Sei $H = L^2(0,1;\mathbb{R})$ mit dem kanonischen Skalarprodukt und $C := \{f \in L^2(0,1) : f(x) \geq 0 \text{ f.ü.}\} \subset H$.

(a) Zeige: C ist konvex und abgeschlossen. (3)

Tipp: Eine Folgerung aus dem Vollständigkeitsbeweis der L^p-Räume in der Maßtheorie kann hier nützlich sein! Man kann diese Aufgabe aber auch von Hand lösen.

Lösung: C ist konvex. Denn für $f_1, f_2 \in H$ und $\lambda \in (0,1)$ ist

$$(\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2)(x) = \lambda f_1(x) + (1-\lambda)f_2(x) \geq 0$$

fast überall. Seien $f_n \in C$ mit $f_n \to f \in H$. Dann gibt es eine Teilfolge f_{nk} derart, dass $f_{nk}(x)$ gegen $f(x)$ für fast alle x konvergiert (das erwähnte Resultat aus der Maßtheorie). Somit ist für fast alle x

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \geq 0.$$

Dies zeigt die Abgeschlossenheit von C.

(b) Bestimme mit Beweis die minimale Projektion P auf C. (4)

Lösung: Wir zeigen, dass $Pf := \max\{f, 0\}$ gilt. Hierzu reicht es wegen $Pf \in C$ nachzurechnen, dass $(f - Pf|g - Pf) \leq 0$ für alle $g \in C$ gilt. Sei $g \in C$. Dann ist

$$(f - Pf|g - Pf) = \int_{f\leq 0} fg \leq 0.$$

21. *Orthogonales Komplement.* Sei $H = L^2(0,2;\mathbb{R})$ mit dem kanonischen Skalarprodukt.

(a) Zeige: Die Abbildung $\varphi : f \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx$ [sic!] ist in H'. (2)

Lösung: Die Linearität ist klar. Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung erhalten wir

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \leq \left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 1\,dx\right)^{1/2} \leq \|f\|.$$

Somit ist φ ein stetiges lineares Funktional.

(b) Bestimme das nach dem Satz von Riesz-Fréchet eindeutige $g \in H$ mit $\varphi(f) = (f|g)$ für alle $f \in H$. (1)

Lösung: Man sieht, dass $g = \mathbb{1}_{[0,1]}$.

(c) Zeige: $U := \{f \in H : \int_0^1 f(x)\,dx = 0\}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H. (1)

Lösung: Es gilt $U = \operatorname{Kern}\varphi$. Kerne stetiger linearer Abbildungen bilden immer abgeschlossene Unterräume, die Unterraumseigenschaft ist aus der Linearen Algebra bekannt, die Abgeschlossenheit folgt aus der Stetigkeit von φ wegen $U = \varphi^{-1}(\{0\})$.

(d) Bestimme mit Beweis das orthogonale Komplement von U. (4)

Lösung: Wir zeigen, dass $U^\perp = \{c\mathbb{1}_{[0,1]} : c \in \mathbb{R}\}$. Durch Nachrechnen sieht man sofort, dass die obigen Elemente tatsächlich alle in $U^\perp$ liegen. Sei nun $f \in H$ beliebig. Dann ist

$$f = \left(f\mathbb{1}_{[0,1]} - \int_0^1 f(x)\,dx\mathbb{1}_{[0,1]} + f\mathbb{1}_{[1,2]}\right) + \int_0^1 f(x)\,dx\mathbb{1}_{[0,1]}.$$

eine und damit die eindeutige Zerlegung von f in U und $U^\perp$. Insbesondere haben wir alle Elemente von $U^\perp$ bereits gefunden.

22. *Einheitskugel kompakt?* Sei H ein separabler, unendlichdimensionaler Hilbertraum. Ist die abgeschlossene Einheitskugel $B \coloneqq \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ in H kompakt? (5)

Lösung: B ist nicht kompakt. Wähle eine Orthonormalbasis (e_n) von H. Dann besitzt die Folge (e_n) keine konvergente Teilfolge, da nach dem Satz von Pythagoras $\|e_n - e_m\|^2 = 2$ für alle $n \neq m$ gilt.

Wiederholung: Eine Teilmenge K eines metrischen Raums (M, d) heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt oder äquivalent jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge besitzt.