Lösungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 9

26. *Der Satz von Radon-Nikodym.* Wir benützen in dieser Aufgabe Hilbertraumtheorie um den Satz von Radon-Nikodym zu beweisen:

Seien λ, μ zwei endliche Maße auf einem Messraum (Ω, Σ) mit $\lambda \ll \mu$, d.h. aus $\mu(A) = 0$ folgt $\lambda(A) = 0$. Dann gibt es eine eindeutige nicht-negative messbare Funktion $h : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\lambda(A) = \int_A h \, d\mu \quad \forall A \in \Sigma.$$

(a) Zeige: $\nu = \lambda + \mu$ definiert ein endliches Maß auf (Ω, Σ). (2)

Lösung: Die Positivität & Endlichkeit von ν und $\nu(\emptyset) = 0$ sieht man sofort. Sei (A_n) eine Folge von paarweise disjunkten messbaren Mengen. Dann ist

$$\nu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lambda(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) + \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

nach den Rechenregeln für Reihen, falls beide Reihen konvergieren. Ist eine der Reihen unendlich, so ist die Identität offensichtlich auch richtig. Man beachte zum Vergleich, dass man im Allgemeinen nicht die Differenz zweier nicht-endlicher Maße (als signiertes Maß) definieren kann!

(b) Zeige: Es gibt ein $g \in L^2(\Omega, \Sigma, \nu)$ mit (4)

$$\int f \, d\lambda = \int fg \, d\lambda + \int fg \, d\mu \quad \forall f \in L^2(\Omega, \Sigma, \nu).$$

Lösung: Wir definieren

$$\varphi : L^2(\Omega, \Sigma, \nu) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int f \, d\lambda.$$

Wie auf dem vorletzten Aufgabenblatt sieht man mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung (da (Ω, Σ, ν) ein endlicher Maßraum ist), dass φ ein stetiges lineares Funktional ist. Nach dem Satz von Riesz-Fréchet gibt es ein $g \in L^2(\Omega, \Sigma, \nu)$ mit $\varphi(f) = (f|g)$ für alle $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \nu)$. Ausgeschrieben heißt das gerade, dass

$$\int f \, d\lambda = \int fg \, d\lambda + \int fg \, d\mu \quad \forall f \in L^2(\Omega, \Sigma, \nu).$$

Also haben wir die Behauptung gezeigt.

Tipp: Verwende den Satz von Riesz-Fréchet.

(c) Zeige: Es ist $g \geq 0$ λ- und μ-fast überall. (3)

Lösung: Es gilt

$$0 \geq \int_N g \, d\nu = \int \mathbb{1}_N g \, d\nu = \int \mathbb{1}_N \, d\lambda = \lambda(N) \geq 0.$$

Hieraus folgt

$$\int_N g \, d\nu = \int_N g \, d\lambda + \int_N g \, d\mu = 0.$$

Dies kann aber nur gelten, falls $\lambda(N) = \mu(N) = 0$ ist.

Tipp: Wir setzen $N \coloneqq \{\omega \in \Omega : g(\omega) < 0\}$. Zeige, dass $\lambda(N) = \mu(N) = 0$.

(d) Wir setzen $G \coloneqq \{\omega \in \Omega : g(\omega) \geq 1\}$. Zeige, dass $\mu(G) = 0$ gilt. (3)

Lösung: Es gilt

$$\lambda(G) = \int \mathbb{1}_G \, d\lambda = \int \mathbb{1}_G g \, d(\lambda + \mu) \geq \lambda(G) + \mu(G).$$

Also $\mu(G) \leq 0$ und damit $\mu(G) = 0$.

(e) Es sei $M \coloneqq \{\omega \in \Omega : 0 \leq g(\omega) < 1\}$. Zeige, dass für alle $A \in \Sigma$ (5)

$$\lambda(M \cap A) = \int_A \frac{g}{1-g} \, d\mu.$$

Lösung: Aus dem Aufgabenteil (b) folgt $\int f(1-g)\, d\lambda = \int fg \, d\mu$ für alle $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \nu)$. Insbesondere ist also für $A \in \Sigma$

$$\lambda(M_n \cap A) = \int \mathbb{1}_{M_n \cap A} \, d\lambda = \int \mathbb{1}_{M_n \cap A} \frac{1-g}{1-g} \, d\lambda = \int \mathbb{1}_{M_n \cap A} \frac{g}{1-g} \, d\mu.$$

Hier haben wir verwendet, dass $\mathbb{1}_{M_n} \frac{1}{1-g}$ eine beschränkte und damit quadratintegrierbare Funktion ist. Aus dem Satz über monotone Konvergenz und der Stetigkeit des Maßes von unten folgt nun

$$\lambda(M \cap A) = \int \mathbb{1}_{M \cap A} \frac{g}{1-g} \, d\mu,$$

da $\mathbb{1}_{M_n \cap A} \frac{g}{1-g}$ monoton gegen $\mathbb{1}_{M \cap A} \frac{g}{1-g}$ konvergiert. Nun ist aber

$$\int \mathbb{1}_{M \cap A} \frac{g}{1-g} \, d\mu = \int_{M \cap A} \frac{g}{1-g} \, d\mu = \int_A \frac{g}{1-g} \, d\mu,$$

da $\mu(G \cup N) = 0$ aus den vorherigen Aufgabenteilen.

Tipp: Für $n \in \mathbb{N}$ setze $M_n \coloneqq \{\omega \in \Omega : 0 \leq g(\omega) \leq 1 - \frac{1}{n}\}$. Zeige zuerst für alle $n \in \mathbb{N}$ die approximative Behauptung

$$\lambda(M_n \cap A) = \int_{A \cap M_n} \frac{g}{1-g} \, d\mu \quad \forall A \in \Sigma$$

und folgere dann die Behauptung der Aufgabe durch ein Grenzwertargument.

(f) Zeige: Es gilt (1)

$$\lambda(A) = \int_A \frac{g}{1-g} \, d\mu + \lambda(A \cap G) \quad \forall A \in \Sigma.$$

Lösung: Durch Zerlegen eines gegebenen $A \in \Sigma$ erhalten wir

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap N) + \lambda(A \cap M) + \lambda(A \cap G) = \int_A \frac{g}{1-g} \, d\mu + \lambda(A \cap G)$$

wegen $\lambda(N) = 0$ und dem vorherigen Aufgabenteil. Zur Erinnerung: Es gilt $\mu(G) = 0$.

(g) Folgere nun den Satz von Radon-Nikodym in der obigen Formulierung. (2)

Lösung: Ist $\lambda \ll \mu$, so folgt aus $\mu(G) = 0$ auch $\lambda(G) = 0$. Mit dem vorherigen Aufgabenteil folgt somit

$$\lambda(A) = \int_A \frac{g}{1-g} \, d\mu \quad \forall A \in \Sigma.$$

Dies zeigt die Existenz mit $h \coloneqq \frac{g}{1-g}$. Sei nun $\tilde{h}$ eine weitere messbare Funktion mit dieser Eigenschaft. Dann gilt $\int_A (h - \tilde{h}) \, d\mu = 0$ für alle $A \in \Sigma$. Hieraus folgt mit den üblichen Argumenten aus der Maßtheorie, dass $h = \tilde{h}$.

Hinweis: Die Eindeutigkeit bitte nicht vergessen!

Bemerkung: Wie in der Maßtheorie getan, kann man nun den Satz von Radon-Nikodym einfach auf σ-endliche Maßräume verallgemeinern.