



Übungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 10

- 27.** *Schwache Konvergenz / Normkonvergenz.* Wir betrachten die Folge $f_n = \mathbb{1}_{[n, n+1]}$ in dem reellen Hilbertraum $H = L^2(\mathbb{R})$.
- (a) Konvergiert (f_n) schwach in H ? (3)
 - (b) Konvergiert (f_n) in H ? (2)
- 28.** *Schwache Abgeschlossenheit.* Eine Teilmenge $M \subset H$ eines Hilbertraums heißt *schwach abgeschlossen*, falls aus $x_n \in M$ mit $x_n \rightharpoonup x$ auch $x \in M$ folgt.
- (a) Zeige oder widerlege: Jede normabgeschlossene Menge ist schwach abgeschlossen. (3)
 - (b) Zeige oder widerlege: Jede schwach abgeschlossene Menge ist normabgeschlossen. (3)
- 29.** Sei H ein separabler Hilbertraum.
- (a) Zeige: Für alle $x \in H$ gilt $\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} (x|y)$. (3)
 - (b) Sei $x_n \rightharpoonup x$. Zeige: Es ist $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$. (4)
 - (c) Zeige: Ist $x_n \rightharpoonup x$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|x\|$, so folgt $x_n \rightarrow x$ in H . (1)
 - (d) Zeige, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B} = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ schwach abgeschlossen in H ist. (1)