Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 4.7.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Lösungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 11

30. *Abgeschlossene konvexe Mengen sind schwach abgeschlossen.* Sei H ein Hilbertraum und $C \subset H$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge. Zeige: C ist schwach abgeschlossen. (4)

Lösung: Sei $x_n \rightharpoonup x$ mit $x_n \in C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, $x \notin C$. Dann gibt es nach dem ersten Trennungssatz ein $p \in H$ und $\epsilon > 0$ mit

$$\operatorname{Re}(p|y) + \epsilon \leq \operatorname{Re}(p|x) \quad \forall\, y \in C.$$

Insbesondere gilt $\operatorname{Re}(p|x_n) + \epsilon \leq \operatorname{Re}(p|x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Grenzwertübergang folgt $\operatorname{Re}(p|x) + \epsilon \leq \operatorname{Re}(p|x)$, also $\epsilon \leq 0$, ein Widerspruch! Damit ist $x \in C$ und C ist schwach abgeschlossen.

Tipp: Verwende den ersten Trennungssatz.

31. *Summe abgeschlossener Mengen.* Sei H ein Hilbertraum und $A, B \subset H$ konvexe abgeschlossene Teilmengen. Ferner sei B beschränkt.

(a) Zeige: $A + B$ ist abgeschlossen. (3)

Lösung: Sei $a_n + b_n \to c$ gegeben mit $a_n \in A$ und $b_n \in B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da B beschränkt ist, gibt es eine schwach konvergente Teilfolge $b_{n_k} \rightharpoonup b$. Nach Aufgabe 30 ist B schwach abgeschlossen und damit $b \in B$. Zudem gilt $a_{n_k} \rightharpoonup c - b \in A$, da A schwach abgeschlossen ist. Somit ist $c = (c-b)+b \in A+B$, was die Abgeschlossenheit von $A + B$ zeigt.

(b) Zeige, dass man auf die Beschränktheitsbedingung nicht verzichten kann. Betrachte dazu $H = \ell^2$ und (3)

$$A = \left\{(x_n) \in \ell^2 : x_{2n-1} = n x_{2n}\right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{(x_n) \in \ell^2 : x_{2n} = 0\right\}.$$

Lösung: Da Konvergenz in ℓ^2 komponentenweise Konvergenz impliziert, sind A und B abgeschlossene Unterräume und damit insbesondere konvex. Ist $x = (x_n) \in A \cap B$, so ist $x_{2n} = 0$ und damit $x_{2n-1} = n x_{2n} = n \cdot 0 = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $x = 0$. Sei $c_N \coloneqq \{(x_n) \in \ell^2 : x_n = 0 \text{ für } n > N\}$. Man sieht leicht, dass $A \cap c_{2N}$ und $B \cap c_{2N}$ beides N-dimensionale Vektorräume sind. Aus Dimensionsgründen folgt somit $(A \oplus B) \cap c_{2N} = c_{2N}$. Zudem liegt der Raum der Folgen mit endlichem Träger $\cup_{N\in\mathbb{N}} c_N$ dicht in ℓ^2. Wäre also $A \oplus B$ abgeschlossen, so würde $A \oplus B = \ell^2$ gelten. Insbesondere gäbe es für $x = (x_n) = (n^{-1})$ eine eindeutige Zerlegung $x = a + b$ mit $a \in A$ und $b \in B$. Dann ist $a_{2n} = (2n)^{-1}$ und damit $a_{2n-1} = n a_{2n} = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu $a \in \ell^2$. Damit ist $A \oplus B$ nicht abgeschlossen.

Tipp: Zeige zuerst, dass $A \cap B = \{0\}$ und $A \oplus B$ dicht in ℓ^2 ist.

32. *Die Adjungierte.* Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$. T heißt *adjungierbar*, falls es ein $S \in \mathcal{L}(H)$ gibt mit

$$(Tx|y) = (x|Sy) \qquad \text{für alle } x, y \in H.$$

(a) Zeige: Ist T adjungierbar, so ist S eindeutig bestimmt. (1)

Lösung: Seien $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(H)$ mit der obigen Eigenschaft. Dann ist $(x|S_1y - S_2y) = 0$ für alle $x, y \in H$. Insbesondere folgt für die Wahl $x = S_1y - S_2y$, dass $\|S_1y - S_2y\| = 0$ für alle $y \in H$. Damit ist $S_1 = S_2$.

Wir bezeichnen in diesem Fall den eindeutigen Operator S mit T^*.

(b) Zeige: Jedes $T \in \mathcal{L}(H)$ ist adjungierbar mit $\|T^*\| \leq \|T\|$. (4)

Lösung: Für festes $y \in H$ ist $x \mapsto (Tx|y)$ nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung eine stetige Linearform auf H. Somit gibt es nach dem Satz von Riesz-Fréchet genau ein $z_y \in H$ mit $(Tx|y) = (x|z_y)$ für alle $x \in H$. Wir setzen also $T^*y = z_y$. Für $y_1, y_2 \in H$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ gilt für alle $x \in H$

$$\begin{aligned}(Tx|\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= \overline{\lambda_1}(Tx|y_1) + \overline{\lambda_2}(Tx|y_2) = \overline{\lambda_1}(x|T^*y_1) + \overline{\lambda_2}(x|T^*y_2)\\ &= (x|\lambda_1 T^*y_1 + \lambda_2 T^*y_2).\end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeitsaussage folgt nun die Linearität von T^*. Es bleibt die Stetigkeit von T^* zu zeigen. Es ist

$$\|T^*y\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |(x|T^*y)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |(Tx|y)| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| \, \|y\| \leq \|T\| \, \|y\| \,.$$

Also ist $T^* \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|T^*\| \leq \|T\|$.

(c) Es gilt $T^{**} = T$ und $\|T\| = \|T^*\|$. (1)

Lösung: Für $x, y \in H$ gilt

$$(T^*x|y) = \overline{(y|T^*x)} = \overline{(Ty|x)} = (x|Ty).$$

Also ist $T^{**} = T$ nach der definierenden Gleichung der Adjungierten. Aus dem vorherigen Aufgabenteil erhält man nun zudem $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\| \leq \|T\|$. Also ist $\|T\| = \|T^*\|$.

(d) Sei ferner $S \in \mathcal{L}(H)$. Zeige: $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. (1)

Lösung: Für $x, y \in H$ gilt

$$(STx|y) = (Tx|S^*y) = (x|T^*S^*y).$$

Somit ist $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

(e) Zeige: Ist $T \in \mathcal{L}(H)$, so ist T auch schwach-schwach stetig, d.h. aus $x_n \rightharpoonup x$ folgt $Tx_n \rightharpoonup Tx$. (3)

Lösung: Sei $x_n \rightharpoonup x$. Dann ist für alle $y \in H$

$$(Tx_n|y) = (x_n|T^*y) \to (x|T^*y) = (Tx|y).$$

Somit ist $Tx_n \rightharpoonup Tx$.