Universität Ulm
Abgabe: Mittwoch, 11.7.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Übungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 12

33. *Hermitesche Matrizen.* Sei $H = \mathbb{C}^n$ endlich-dimensional mit dem kanonischen Skalarprodukt und $(T_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ die Abbildungsmatrix eines Operators $T \in \mathcal{L}(H)$ bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{C}^n$. Zeige: T ist genau dann selbstadjungiert, wenn $T_{ij} = \overline{T_{ji}}$ gilt. (2)

34. *Multiplikationsoperatoren.* Sei H ein komplexer separabler Hilbertraum mit einer Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wie in Aufgabe 14 definieren wir für eine beschränkte Folge $m = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Multiplikationsoperator

$$T_m : x = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)e_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} m_n (x|e_n) e_n.$$

Wir haben bereits gesehen, dass $T_m \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|T_m\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|$ gilt.

(a) Bestimme die Adjungierte T_m^*. Für welche Folgen $m = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist der Multiplikationsoperator T_m selbstadjungiert? (2)

(b) Bestimme das Punktspektrum $\sigma_p(T_m)$ von T_m. (2)

(c) Bestimme das Spektrum $\sigma(T_m)$ von T_m. (2)
Hinweis: Es darf benutzt werden, dass $\sigma(T_m) \subset \mathbb{C}$ kompakt ist.

(d) Für welche Folgen $m = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist T_m ein kompakter Operator? (3)

35. Wir betrachten auf dem Hilbertraum $L^2(0,1)$ den Operator

$$\begin{aligned} T : L^2(0,1) &\to L^2(0,1) \\ f &\mapsto \left[t \mapsto \int_0^t f(x)\,dx \right]. \end{aligned}$$

(a) Zeige: $T \in \mathcal{L}(L^2(0,1))$. (1)

(b) Zeige: $\sigma(T) \neq \emptyset$. (1)

(c) Zeige: $\sigma_p(T) = \emptyset$, d.h. T besitzt keine Eigenwerte. (3)

36. Sei H ein separabler Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ kompakt. Zeige: Für $\lambda \neq 0$ ist (4)

$$\dim(\mathrm{Kern}(T - \lambda)) < \infty.$$

Tipp: Nimm an, dass $\dim(\mathrm{Kern}(T - \lambda)) = \infty$ gilt und führe dies zum Widerspruch (zur Kompaktheit von T).