Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 18.7.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Übungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 13

Für die Vorleistung werden 120 Übungspunkte benötigt, das sind 50% der Übungspunkte aus den Übungsblättern 1 bis 12. Das aktuelle Übungsblatt 13 ist das letzte und wird als Bonusblatt gewertet.

37. *Fouriertransformation bestimmen.* Bestimme die Fouriertransformation der folgenden Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) $f(y) = e^{-ay}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$ für $a > 0$. (3)

(b) $f(y) = \mathbb{1}_{[-n,n]}(y)$ für $n \in \mathbb{N}$. (3)

(c) $f(y) = ye^{-y^2/2}$. (3)

38. *Ein kurzer Blick auf Banachalgebren.* Eine *assoziative Algebra* über einem Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer bilinearen Verknüpfung $* : A \times A \to A$, der *Multiplikation* auf A, für die das Assoziativgesetz gilt.
Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Norm $\|\cdot\|$ und einem Produkt $*$ heißt *Banachalgebra* über $\mathbb{K}$, falls

- $(A, +, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist,
- $(A, +, *)$ eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra ist und
- $\|a * b\| \le \|a\| \, \|b\|$ für alle $a, b \in A$ gilt.

Wir haben in der Vorlesung also gesehen, dass die Faltungsalgebra $(L^1(G), +, *)$ eine Banachalgebra ist.

(a) Zeige, dass in jeder Banachalgebra A die Multiplikation $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto a * b$ stetig ist. (2)

(b) Zeige, dass die assoziative Algebra $C_b(\mathbb{R})$ der komplexwertigen beschränkten stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm eine Banachalgebra ist. (3)
Hinweis: Nach der Formulierung der Aufgabe muss der zweite der drei oberen Punkte also nicht überprüft werden.

39. *Die Faltungsalgebra besitzt keine Eins.* Wir sagen, eine Banachalgebra A besitzt eine Eins, falls es ein $e \in A$ mit $e \cdot f = f \cdot e = f$ für alle $f \in A$ gibt. Zeige:

(a) Die Banachalgebra $C_b(\mathbb{R})$ besitzt eine Eins. (1)

(b) Die Banachalgebra $C_0(\mathbb{R})$ besitzt keine Eins. (2)

(c) Die Faltungsalgebra $(L^1(G), +, *)$ besitzt keine Eins. (3)

Hinweis: Betrachte die Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ und deren Fouriertransformation.