Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 18.7.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Lösungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 13

Für die Vorleistung werden 120 Übungspunkte benötigt, das sind 50% der Übungspunkte aus den Übungsblättern 1 bis 12. Das aktuelle Übungsblatt 13 ist das letzte und wird als Bonusblatt gewertet.

37. *Fouriertransformation bestimmen.* Bestimme die Fouriertransformation der folgenden Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) $f(y) = e^{-ay}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$ für $a > 0$. (3)

Lösung: Es gilt

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-ay} e^{-ixy}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(a+ix)y}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+ix)}.$$

(b) $f(y) = \mathbb{1}_{[-n,n]}(y)$ für $n \in \mathbb{N}$. (3)

Lösung: Es gilt

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n e^{-ixy}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi} ix}(e^{inx} - e^{-inx}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(nx)}{x}.$$

(c) $f(y) = ye^{-y^2/2}$. (3)

Lösung: Sei $F(y) = e^{-y^2/2}$. Dann ist

$$\hat{f}(y) = -\widehat{F'}(y) = -iy\hat{F}(y) = -iye^{y^2/2}.$$

38. *Ein kurzer Blick auf Banachalgebren.* Eine *assoziative Algebra* über einem Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer bilinearen Verknüpfung $* : A \times A \to A$, der *Multiplikation* auf A, für die das Assoziativgesetz gilt.
Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Norm $\|\cdot\|$ und einem Produkt $*$ heißt *Banachalgebra* über $\mathbb{K}$, falls

- $(A, +, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist,
- $(A, +, *)$ eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra ist und
- $\|a * b\| \le \|a\| \, \|b\|$ für alle $a, b \in A$ gilt.

Wir haben in der Vorlesung also gesehen, dass die Faltungsalgebra $(L^1(G), +, *)$ eine Banachalgebra ist.

(a) Zeige, dass in jeder Banachalgebra A die Multiplikation $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto a * b$ stetig ist. (2)

Lösung: Seien $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} \|a_n * b_n - a * b\| &= \|a_n * (b_n - b) + (a_n - a) * b\| \le \|a_n * (b_n - b)\| + \|(a_n - a) * b\| \\ &\le \|a_n\| \, \|b_n - b\| + \|a_n - a\| \, \|b\| . \end{aligned}$$

Die rechte Seite geht gegen Null, da (a_n) als konvergente Folge beschränkt ist.

(b) Zeige, dass die assoziative Algebra $C_b(\mathbb{R})$ der komplexwertigen beschränkten stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm eine Banachalgebra ist. (3)

Lösung: Wir zeigen zuerst, dass $C_b(\mathbb{R})$ ein Banachraum ist. Wir haben bereits in der Vorlesung gesehen, dass die Menge aller beschränkten Funktionen mit der Supremumsnorm ein Banachraum ist. Es reicht also zu zeigen, dass $C_b(\mathbb{R})$ in diesem Raum abgeschlossen ist. Das folgt aber sofort aus der Grundvorlesung Analysis, in der gezeigt wurde, dass der gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig ist.

Ferner gilt für $f, g \in C_b(\mathbb{R})$ die Ungleichung $|(fg)(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also gilt $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. Somit ist $C_b(\mathbb{R})$ eine Banachalgebra.

Hinweis: Nach der Formulierung der Aufgabe muss der zweite der drei oberen Punkte also nicht überprüft werden.

39. *Die Faltungsalgebra besitzt keine Eins.* Wir sagen, eine Banachalgebra A besitzt eine Eins, falls es ein $e \in A$ mit $e \cdot f = f \cdot e = f$ für alle $f \in A$ gibt. Zeige:

(a) Die Banachalgebra $C_b(\mathbb{R})$ besitzt eine Eins. (1)

Lösung: Die Einsfunktion $\mathbb{1} : x \mapsto 1$ ist offensichtlich eine Eins in $C_b(\mathbb{R})$.

(b) Die Banachalgebra $C_0(\mathbb{R})$ besitzt keine Eins. (2)

Lösung: Angenommen, $e \in C_0(\mathbb{R})$ ist eine Eins in $C_0(\mathbb{R})$. Für $m \in \mathbb{Z}$ betrachte eine Funktion $f_m \in C_0(\mathbb{R})$ mit $f_m(x) = 1$ für alle $x \in [m, m+1]$. Hieraus folgt $e(x) = e(x)f_m(x) = f_m(x) = 1$ für alle $x \in [m, m+1]$. Da $m \in \mathbb{Z}$ beliebig ist, folgt $e = \mathbb{1}_\mathbb{R}$ im Widerspruch zu $e \in C_0(\mathbb{R})$.

(c) Die Faltungsalgebra $(L^1(G), +, *)$ besitzt keine Eins. (3)

Lösung: Angenommen, $e \in L^1(\mathbb{R})$ ist eine Eins in $L^1(\mathbb{R})$. Dann ist $e * f = f$ und da die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ nach der Vorlesung ein Algebrahomomorphismus $L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ ist, folgt

$$\mathcal{F}(e) \cdot f = \mathcal{F}(e) \cdot \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(e * f) = \mathcal{F}(f) = f.$$

Da $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt hieraus $\mathcal{F}(e) = \mathbb{1}_\mathbb{R}$. Nach dem Satz von Riemann-Lebesgue müsste aber $\mathcal{F}(e) \in C_0(\mathbb{R})$ gelten, ein Widerspruch!

Hinweis: Betrachte die Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ und deren Fouriertransformation.