Universität Ulm

Freitag, 27.7.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 100+32

Lösungen zur Klausur Hilberträume & Fouriertransformation

1. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit Fouriertransformierter $\hat{f}$. Für ein $a \in \mathbb{R}$ definieren wir eine neue Funktion $g(t) \coloneqq f(t-a)$. Zeige, dass $g \in L^1(\mathbb{R})$ und bestimme die Fouriertransformierte $\hat{g}$ von g in Abhängigkeit von $\hat{f}$. (10)

Lösung: Aus der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t-a)| \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty.$$

Also ist $g \in L^1(\mathbb{R})$. Für die Fouriertransformation folgt ebenso aus der Translationsinvarianz, dass

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y-a) e^{-ixy} \, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ix(y+a)} \, dy = e^{-ixa} \hat{f}(x).$$

2. Es seien $(E, \|\cdot\|)$ und $(F, \|\cdot\|)$ zwei normierte Räume und $T: E \to F$ linear. Zeige, dass T genau dann stetig ist, wenn es ein $C \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq C \|x\|$ für alle $x \in E$ gibt. (15)

Lösung: Gibt es ein solches $C \geq 0$, so folgt aus $x_n \to x$

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq C \|x_n - x\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Also ist T stetig. Umgekehrt folgt aus der Stetigkeit (in der Null), dass es ein $\delta > 0$ gibt so, dass aus $\|x\| \leq \delta$ die Abschätzung $\|Tx\| \leq 1$ folgt. Da die Ungleichung für $x = 0$ offensichtlich erfüllt ist, können wir $x \neq 0$ annehmen. Dann ist

$$\|Tx\| = \delta^{-1} \left\| T\left(\delta \frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \|x\| \leq \delta^{-1} \|x\|,$$

also ist die Behauptung mit $C \coloneqq \delta^{-1}$ gezeigt.

3. Wir betrachten den reellen Hilbertraum $H = \ell^2$.

(a) Zeige, dass die Menge $M \coloneqq \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2 : x_1 = x_2\}$ ein abgeschlossener Unterraum von ℓ^2 ist. (10)

Lösung: Das lineare Funktional $\varphi : (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto x_1 - x_2$ ist wegen $|x_i| \leq \|x\|_{\ell^2}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ stetig. Daraus folgt, dass $M = \operatorname{Kern} \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ ein abgeschlossener Unterraum ist.

(b) Gebe explizit mit Beweis die orthogonale Projektion P von H auf M an. (10)

Lösung: Wir behaupten, dass $Px = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, x_4, \ldots)$ die gesuchte Projektion ist. Schreibt man $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, x_4, \ldots)$ als die Summe

$$\frac{1}{2}(x_1, x_2, x_3, \ldots) + \frac{1}{2}(x_2, x_1, x_3, x_4, \ldots),$$

so folgt aus der Dreiecksungleichung, dass $P \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|P\| \leq 1$. Offensichtlich gilt auch $P^2 = P$ mit $\operatorname{Rg} P = M$, d.h. P ist eine Projektion auf M. Um zu zeigen, dass P

die orthogonale Projektion auf H ist, rechnen wir die charakterisierende Eigenschaft der orthogonalen Projektion nach. In der Tat gilt für $x \in \ell^2$ und $y \in M$, dass

$$\begin{aligned}(x - Px|y - Px) &= (x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2})(y_1 - \frac{x_1 + x_2}{2}) + (x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2})(y_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}) \\ &= (y_1 - \frac{x_1 + x_2}{2})(x_1 + x_2 - (x_1 + x_2)) = 0.\end{aligned}$$

Also ist P die orthogonale Projektion.

4. Wir betrachten den reellen Hilbertraum $H = \ell^2$.

(a) Es gelte $x_n \rightharpoonup x$ in ℓ^2. Zeige, dass dann x_n komponentenweise gegen x konvergiert. (10)

Lösung: Sei $x_n \rightharpoonup x$. Dann ist $(x_n|y) \to (x|y)$ für alle $y \in \ell^2$. Insbesondere gilt für den k-ten Einheitsvektor $y = e_k = (\delta_{kl})_{l\in\mathbb{N}}$, dass $x_n^{(k)} = (x_n|e_k) \to (x|e_k) = x^{(k)}$. Das ist gerade die komponentenweise Konvergenz.

(b) Gilt auch die Umkehrung? Begründe Deine Antwort! (10)

Lösung: Die Umkehrung gilt nicht. Betrachte die Folge $(ne_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist $(ne_n|e_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ schließlich gleich Null, aber die Folge konvergiert nicht schwach, da sie nicht beschränkt ist.

5. Sei H ein komplexer separabler Hilbertraum.

(a) Formuliere eine Version des Spektralsatzes für kompakte selbstadjungierte lineare Operatoren aus der Vorlesung. (10)

Lösung: Siehe Skript.

(b) Sei P ein kompakter selbstadjungierter linearer Operator auf H.
Zeige: P ist genau dann eine Projektion, wenn für das Punktspektrum $\sigma_p(P) \subset \{0, 1\}$ gilt. (15)

Lösung: Ist λ ein Eigenwert mit Eigenvektor x, so gilt $\lambda x = Px = P^2x = \lambda^2 x$, also erfüllt λ die Gleichung $\lambda(\lambda - 1) = 0$ und somit $\sigma_p(P) \subset \{0, 1\}$. Umgekehrt folgt aus dem Spektralsatz, dass es eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von H mit $Px = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x|e_n)e_n$ gibt. Nach Voraussetzung gilt $\lambda_n = 0$ oder $\lambda_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $P^2e_n = Pe_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ total ist, folgt $P^2 = P$. P ist also eine Projektion.

6. Finde mit Begründung ein Beispiel für

(a) einen kompakten linearen Operator auf einem Hilbertraum mit unendlichdimensionalem Bild. (7)

Lösung: Für einen separablen Hilbertraum mit einer Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachte wie in den Übungen den Multiplikationsoperator T_m bezüglich einer Nullfolge m, für die $m_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Nach den Übungen ist dann T_m kompakt und wegen $e_n \in \operatorname{Rg} T_m$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist das Bild unendlichdimensional.

(b) einen Prähilbertraum, der kein Hilbertraum ist. (7)

Lösung: Der Raum c_{00} aller Folgen, die schließlich Null sind, ist ein Unterraum von ℓ^2 und wird mit dem von ℓ^2 induzierten Skalarprodukt ein Prähilbertraum. Unterräume von Hilberträumen sind nach der Vorlesung aber genau dann vollständig, wenn sie abgeschlossen sind. Betrachtet man etwa die Folge $x_n = (\mathbb{1}_{[0,n]}(k)\frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}}$, so sieht man, dass c_{00} nicht abgeschlossen ist. Der Unterraum c_{00} liegt sogar dicht in ℓ^2, da wir jedes Element $x \in \ell^2$ wegen $\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \to 0$ beliebig genau durch Elemente aus c_{00} approximieren können.

(c) einen Hilbertraum H und einen Unterraum $U \subset H$, der dicht in H ist und $U \neq H$ erfüllt. (7)

Lösung: Man nehme $H = \ell^2$ und $U = c_{00}$ wie in dem vorherigen Beispiel.

(d) einen Hilbertraum H und eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H, die nicht schwach konvergiert. (7)

Lösung: Die Folge $x_n = (-1)^n$ in $H = \mathbb{R}$ konvergiert nicht schwach, da ansonsten $(x_n|1) = 1 \cdot x_n = (-1)^n$ konvergieren müsste.

(e) einen Hilbertraum H und einen injektiven Operator $T \in \mathcal{L}(H)$, der nicht invertierbar ist. (7)

Lösung: Betrachte auf ℓ^2 den Operator $u : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Dieser ist offensichtlich injektiv. Die Folge $(1, 0, 0, \ldots)$ kann aber nicht in dem Bild von u liegen. Somit ist u nicht surjektiv und damit nicht invertierbar.

(f) einen separablen Hilbertraum H und ein abzählbares Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H, das keine Orthonormalbasis ist. (7)

Lösung: Wähle eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eines separablen Hilbertraums H. Dann ist $(e_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ keine Orthonormalbasis, denn es gilt $(e_1|e_n) = 0$ für alle $n \geq 2$, aber $e_1 \neq 0$, was bei einer Orthonormalbasis nicht der Fall sein kann.