Universität Ulm

Samstag, 6.10.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 100+37

Klausur Hilberträume & Fouriertransformation

1. Sei H ein reeller Hilbertraum und $\alpha : H \times H \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform.

(a) Zeige, dass die Polarisationsformel

$$\alpha(x,y) = \frac{1}{4}(\alpha(x+y,x+y) - \alpha(x-y,x-y))$$

für alle $x, y \in H$ gilt. (5)

(b) Seien $T, S \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert mit $(Tx|x) = (Sx|x)$ für alle $x \in H$. Zeige, dass $T = S$ gilt. (10)

2. (a) Formuliere den Satz von Plancherel aus der Theorie der Fouriertransformation. (10)

(b) Zeige, dass $A := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \mathcal{F}_2(f) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})\}$ ein dichter Unterraum von $L^2(\mathbb{R})$ ist. Hierbei bezeichnet $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ die Fourier-Plancherel-Transformation. (10)
Tipp: Zeige zuerst, dass $L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt.

3. Wir betrachten in dieser Aufgabe den reellen Hilbertraum $H = \ell^2$ und die Teilmenge $C := \{(x_n) \in \ell^2 : 0 \leq x_n \leq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Zeige: C ist konvex und abgeschlossen. (5)

(b) Bestimme explizit mit Beweis die minimale Projektion P auf C. (10)

4. Sei $f \in L^2_{\text{per}}$. Zeige, dass die Folge der Fourierkoeffizienten $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ von f eine Nullfolge bilden. (10)

5. Wir betrachten auf dem (komplexen) Hilbertraum $H = \ell^2$ den sogenannten Linksshift-Operator $T : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Zeige, dass $T \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|T\| = 1$ gilt. (5)

(b) Bestimme die Adjungierte $T^* \in \mathcal{L}(H)$. (10)

(c) Zeige, dass $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. (10)

(d) Bestimme $\sigma(T)$. (10)

6. Finde mit Begründung ein Beispiel für

(a) einen Hilbertraum H und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H mit $x_n \rightharpoonup x$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = c$ für ein $c \geq 0$, aber $\|x\| \neq c$; (7)

(b) einen Hilbertraum H und einen Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ für den es ein $\lambda \in \sigma(T)$ gibt, das kein Eigenwert von T ist; (7)

(c) einen normierten Raum E und ein nicht stetiges lineares Funktional $\varphi : E \to \mathbb{R}$; (7)

(d) eine unbeschränkte Folge, die im Cesàro-Sinne konvergiert; (7)

(e) einen Hilbertraum H und einen isometrischen Operator $T \in \mathcal{L}(H)$, der nicht surjektiv ist; (7)

(f) einen Hilbertraum H und einen Unterraum $U \subset H$ mit $U \neq H$ und $U^\perp = 0$. (7)